2013.03.24

\# 제5회 137억년 우주 진화

일반상대성 이론 - 일반적이지 않는 것이 상대성 이론이다. 특수 상대성 이론을 발표 후에 중력 현상을 포함한 이론을 만들고 싶었다.

길을 잃지 않기 위한 기본적 원리가 있다. - 중력장 방정식을 유도하는 기본 원리.
- 일반상대성 이론을 이해하는 기본 원리.

1. 등가 원리
2. 일반 공변성 원리 (principle of general covariance) — 좌표와 무관, - 함께 변하는 -
3. 고전 이론 포함 → $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$ (-P.E, -밀도) Poisson eq. ⇒ $R^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}$
   등가·공변을 대입하면 이 공식이 된다
4. 에너지 보존 법칙

→ 이 공식이 에너지 보존법칙에 위배 되는 것을 알게 된다.

Tip

아인슈타인이 어느 오후에 이런 생각을 했다. "엘리베이터를 타고 가다가 끊어지면 어떻게 될까?"

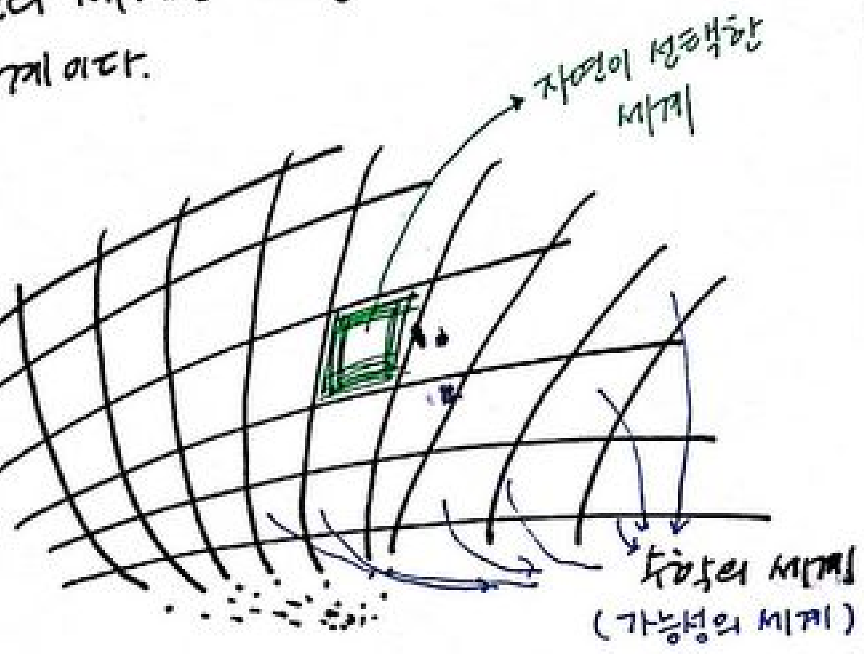
아인슈타인은 중력을 느낄 수 없다고 결론을 도출한다.

중력과 가속도의 값이 같다는 원리를 끌어내게 된다.

중력의 현상을 안다고 하기가 모호하다. 그러나 가속도와 중력의 값이 같다고 (등가 원리) 추정하면 가속도의 현상을 통해 중력 현상을 알게될거라는 발견이었다. 중력의 현상을 모른다. 그러나 가속도를 안다고 하면 중력을 설명할 수 있다. 그래서 고전이론을 끌어들인다. (고전 이론 포함) 뉴튼의 절대공간, 절대 시간의 (가속이 없음) 원칙에 등속 운동과 관성계 (힘이 작용하지 않는 시스템) 4차원의 원리를 집어 넣은 것이다.

거인의 어깨 위에 올라 갔다는 말은 뉴턴의 이론을 통해 빛의 현상, 중력의 현상을 연다. 이것이 "일반 상대성 이론"이다.

• 수학의 세계는 모든 가능성의 세계다. 자연의 세계는 그 중 지금 자연이 선택한 세계이다.



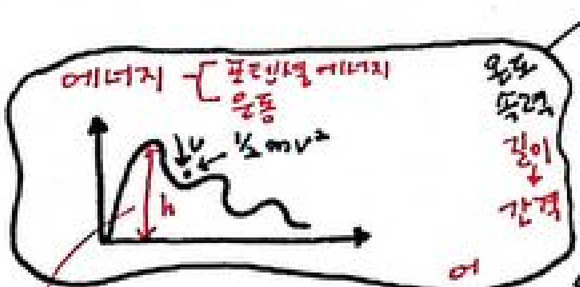
• 인생에서 일반 상대성 이론을 이해하고 접한다는 것은 깨달음을 얻는 것보다 큰 것이다. 이것이 "진실"이기 때문이다. 수학의 세계는 인간의 의식이 만든 가상의 세계이다. 그러나 일반상대성 이론은 자연이 선택한 "리얼한 세계"이다.

- "박문호 박사" -

"깨달음을 얻는다고 시공간의 곡률은 알 수 없다. 환상·가상의 세계 그것은 우리가 살고 있는 세계이다. 일반상대성 이론의 세계를 만난다는 건 리얼한 세계를 접한다는 의미다."

"일반상대성 이론은
이해하는 세계가 아니다. 익숙해지는 세계이다." - 박문호 박사 -
(수식으로)

· 필드(field)의 개념은 "파라데이"가 처음 등장 시켰다. 정규교육을 받지 못한 파라데이는 모든 현상을 그려 했다.



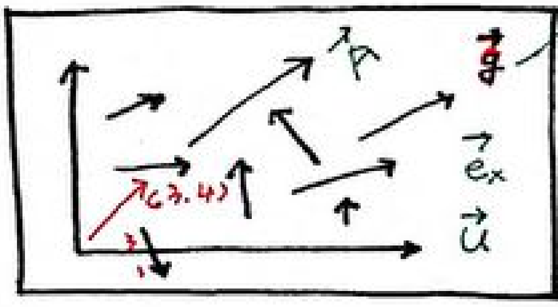
P.E = mgh
(포텐셜 에너지)

→ 이 Box는 field를 표현한다
↳ 좌표의 값으로 표시된 물리량

vector와 scalar를 ㄸ며 개념을 설명할수 있어야 한다.

Scalar → 0차 tensor

(자연에서 가장 기저가 되는 vector)
일반상대성 이론을 여는 $\vec{g}$ 보통 vector를 미분한 값이다.
자연 기저 vector (천년자재 key)
(natural basis vector)



Covariance는 평행 이동이다. vector를 가진 값이 평행으로 이동 시킬 수 있다. vector의 값을 원점으로 옮겨 놓을 수 있다.
-(vector의 값을 원점으로 옮기면 행렬이 된다.)

vector → 1차 tensor $x_1 \quad x_2 \quad x_3$
$\quad = x \quad = y \quad = z$

$$(3.4)\vec{A} = (-2, 7, 5)$$

$$\vec{A} = (+3.4, 7, -5)$$ → 4차원 수식으로 바꾸면 이렇게 된다.
$x^1 \quad x^2 \quad x^3 \quad x^3$

$u \to x^0, x^1, x^2, x^3$
= (t, x, y, z 직각 좌표계)
= (t, r, θ, φ 구좌표)
= (t, r, ψ 원통 좌표)

$x^0 = ct$
길이 시간

tensor는 좌표로 표현할 수 있을까?
할 수 있지만 하지 않는다. 왜 index의 세계, 순서의 세계이기 때문이다.

tensor는 index, 순서, 지표의 세계이기에 좌표로 표현하지 않는다.

R, $R_{\mu\nu}$, $\underline{R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma}}$ → (Riemann)
전곡률 tensor (Ricci tensor)

$g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j$ $\quad T^{\mu\nu}$
계량 tensor (energy-momentum tensor)

$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \underset{\smile}{g^{\mu\nu}} R$
matric tensor that's all (Einstein tensor)
⇒ 중력장 → 시공 연속체 (시간과 공간이 분리되지 않기 때문)
(일반상대성 이론에서 알아야 할 tensor)

tensor = 2차 tensor

matric tensor가 무엇이냐는 질문은 자연 기저 vector가 무어냐고 묻는 것과 같다. scalar (0차 tensor) vector (1차 tensor) tensor (2차 tensor) 이기 때문이다.

∇ = 중력장의 세기 force

ϕ = 중력장 그 자체

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \Rightarrow R^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} \Rightarrow R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \quad R = kT^{\mu\nu}$$

∇^2 → P.E

ρ → 밀도 (질량).

→ 에너지 보존 법칙에 위배

공식의 완성

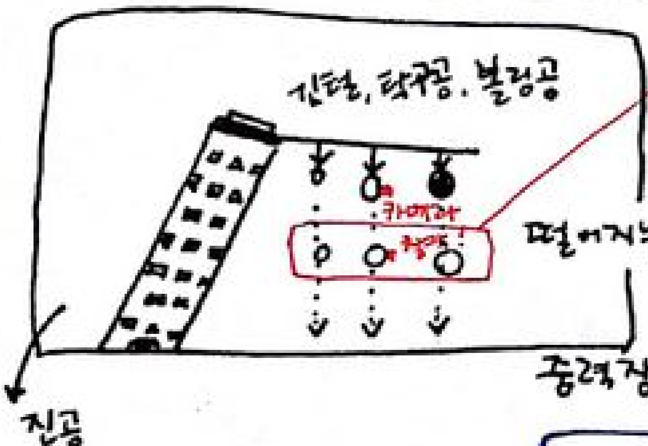
$= R^{\mu\nu}$ → vector (x^0, x^1, x^2, x^3)

전곡률

4차원 등가 일반공변성을 대입

중력장 ⇓ 시공연속체 대입

$\boxed{R^{\mu\nu} \rightarrow \Gamma_{\cdot\cdot} \rightarrow g_{\cdot\cdot} \rightarrow \phi}$



카메라를 떨어지는 물체에 달고 같이 떨어지는 → 정지계 → 관성계 → 국부 관성계

중력장 방정식

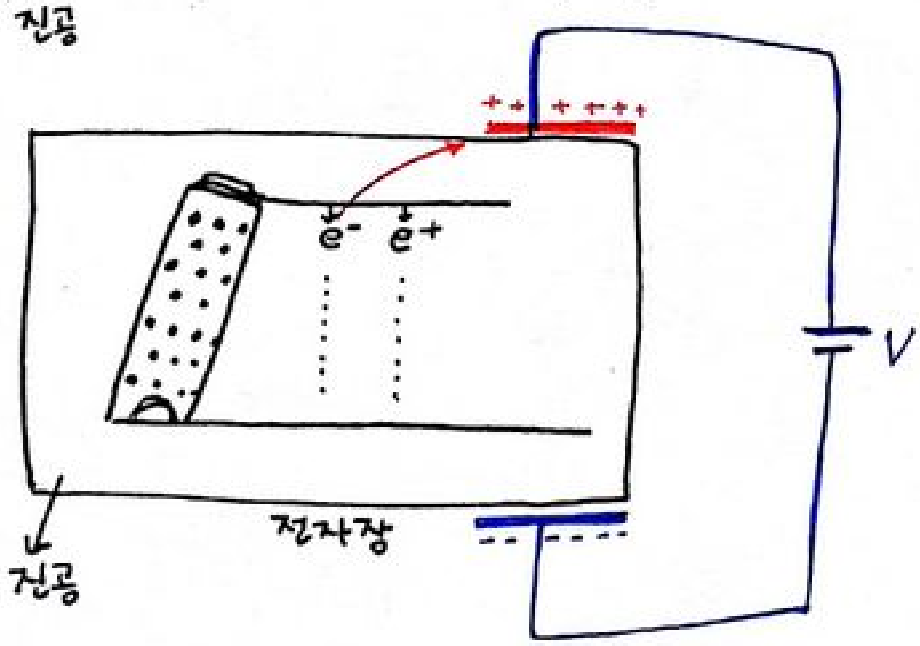
물체를 찍으면 옆의 물체는 멈춰 있다.

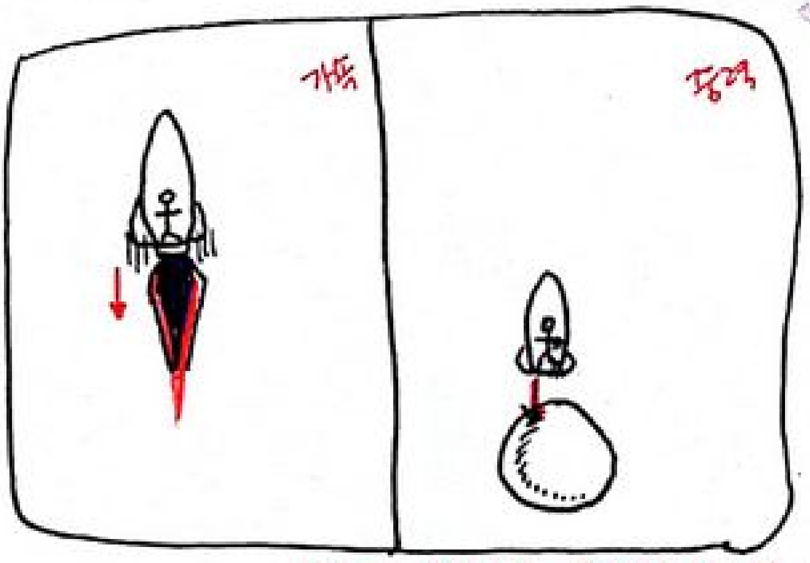
중력은 차별하지 않는다.

전자장은 차별 한다.

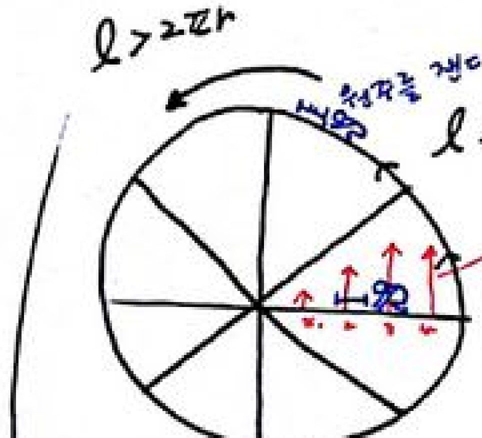
지구의 최대 캐년(협곡)은 4km 정도 이다. 그러나 화성은 10km 이상의 캐년이 존재한다. 지구 중력의 1/10 정도 이기 때문이다.

넘어지는 현상에 민감 하라.





가속과 중력은 구분할 수 없다.

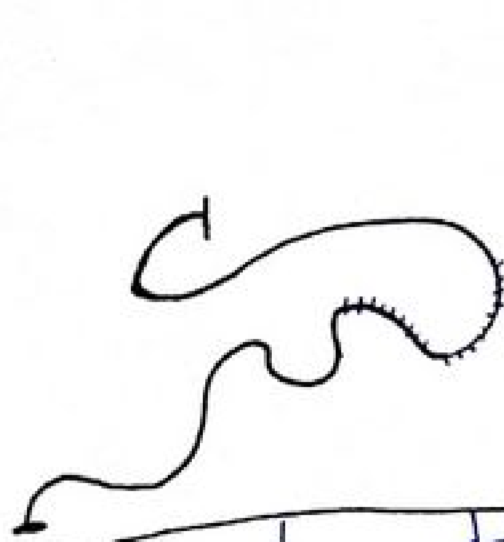


$$l = l_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 의 위치가 다를 때 시간이 다르게 된다.
안쪽 일 수록 원운동이 빠르고
밖으로 갈 수록 원운동 느리다.

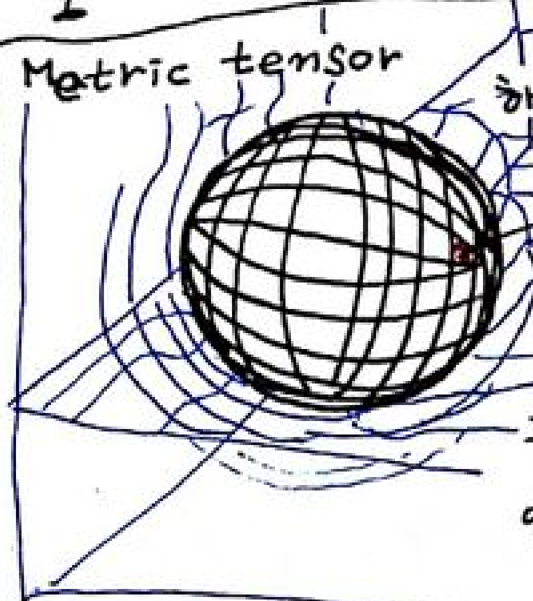
$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

원 운동은 가속도 운동 이기에 자의 길이가 바뀐다. 결국 길이가 바뀐다. 가속 운동이 일어나 길이가 바뀌면서 공간의 곡률이 생긴다.



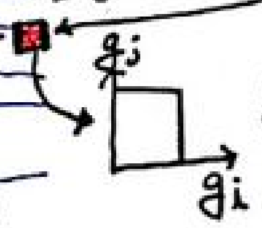
모든 길이를 알기 위해서는 모든 선을 쪼갤 수 있는 만큼 쪼개고 이것을 더하면 길이를 잴 수 있다. 이것이 "미분"을 통해 알 수 있다. dx 이다.

Metric tensor



하나의 공간을 자를 수 있는 만큼 쪼갠 것이 "metric tensor"이다.

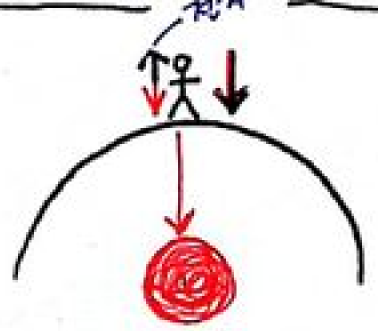
"natural basis vector"이다.



$$g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j$$

g_i natural basis vector.

중력에 의해 공간이 휘어 생긴 중력장을 잴 수 있는 원리가 된다. 가속에 의해 중력을 왜곡 시키고 중력도 왜곡을 만든다. 이 때 휘어진 시공을 metric tensor와를 통해 수식을 유도하고 계산해 낸다.



우리는 모두 자유낙하하고 있다. 중력에 대해 전자기로 뭉쳐진 우리의 몸과, 돌과 땅이 중력에 버티고 있을 뿐이다.

공변미분 : 공변성을 확보하기 위한 미분

; ,

일반 미분

vector이다. x^1, x^2, x^3, x^4

공변 미분 (일반 공변성 법칙의 공변)

로우 | 시그마

한번더 공변 미분

1 $(A_\mu B_\nu)_{;\rho;\sigma} - (A_\mu B_\nu)_{;\sigma;\rho}$

① $= (A_{\mu;\rho} B_\nu + A_\mu B_{\nu;\rho})_{;\sigma} - (A_{\mu;\sigma} B_\nu + A_\mu B_{\nu;\sigma})_{;\rho}$

② $= A_{\mu;\rho;\sigma} B_\nu + A_{\mu;\rho} B_{\nu;\sigma} + A_{\mu;\sigma} B_{\nu;\rho} + A_\mu B_{\nu;\rho;\sigma}$
$- (A_{\mu;\sigma;\rho} B_\nu + \underline{A_{\mu;\sigma} B_{\nu;\rho}} + \underline{A_{\mu;\rho} B_{\nu;\sigma}} + A_\mu B_{\nu;\sigma;\rho})$

③ $= (\underline{A_{\mu;\rho;\sigma} - A_{\mu;\sigma;\rho}}) B_\nu + A_\mu (\underline{B_{\nu;\rho;\sigma} - B_{\nu;\sigma;\rho}})$

④ $= \underline{A_\alpha R^\alpha_{\mu\rho\sigma}} B_\nu + A_\mu \underline{B_\alpha R^\alpha_{\nu\rho\sigma}}$

1′ $A_{\mu\nu;\rho;\sigma} - A_{\mu\nu;\sigma;\rho} = A_{\alpha\nu} R^\alpha + A_{\mu\alpha} R^\alpha_{\nu\rho\sigma}$

② $A_{\mu;\nu;\rho;\sigma} - A_{\mu;\nu;\sigma;\rho} = A_{\alpha;\nu} R^\alpha_{\mu\rho\sigma} + A_{\mu;\alpha} R^\alpha_{\nu\rho\sigma}$

$$\overset{③}{A_{\mu;e;\sigma;\nu}} - A_{\mu;e;\nu;\sigma} = A_{\alpha;e} R_{\mu\sigma\nu} + A_{\mu;\alpha} \overset{③}{R^{\alpha}_{e\sigma\nu}}$$

$$\overset{①}{A_{\mu;\sigma;\nu;e}} - A_{\mu;\sigma;e;\nu} = A_{\alpha;\sigma} \overset{③}{R_{\mu\nu e}} + A_{\mu;\alpha} R^{\alpha}_{\sigma\nu e}$$

$\sigma e \nu$ (시그마, 로우, 람다)

③을 변환 ④ —의 내용을 리만 공식을 정리.

$$A_{\mu;e;\sigma} - A_{\mu;\sigma;e} = A_{\alpha} R^{\alpha}_{\mu e\sigma} \Rightarrow ;\nu$$

$$A_{\mu;e;\sigma;\nu} - A_{\mu;\sigma;e;\nu} = A_{\alpha;\nu} R^{\alpha}_{\mu e\sigma} + A_{\alpha} R^{\alpha}_{\mu e\sigma;\nu}$$

$$\overset{①'}{A_{\mu;\sigma;\nu;e}} - A_{\mu;\sigma;e;\nu} = A_{\alpha;e} \overset{②'}{R^{\alpha}_{\mu\sigma\nu}} + A_{\alpha} R^{\alpha}_{\mu\sigma\nu;e}$$

$$\overset{②'}{A_{\mu;\nu;e;\sigma}} - A_{\mu;\nu;\sigma;e} = A_{\alpha;\sigma} \overset{③'}{R^{\alpha}_{\mu\nu e}} + A_{\alpha} R^{\alpha}_{\mu\nu e;\sigma}$$

$$\overset{③'}{A_{\mu;e;\sigma;\nu}} - A_{\mu;e;\nu;\sigma} = A_{\alpha;\nu} \overset{①'}{R^{\alpha}_{\mu e\sigma}} + A_{\alpha} R^{\alpha}_{\mu e\sigma;\nu}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

① ② ③ ①′ ②′ ③′ 빼고 ① ② ③을 ①′ ②′ ③′을 배고 남으면

$$\rightarrow A_{\mu;\alpha}\underbrace{(R^{\alpha}_{\nu e\sigma} + R^{\alpha}_{e\sigma\nu} + R^{\alpha}_{\sigma\nu e})}_{=0} - A_{\alpha}(R^{\alpha}_{\mu\sigma\nu;e} + \underbrace{R^{\alpha}_{\mu e\sigma;\nu}) }_{=0} = 0$$

$g_{\mu\nu;i}$ → 미분

$g_{\mu\nu} \to \Gamma \to R$ ① 미분 ② 미분

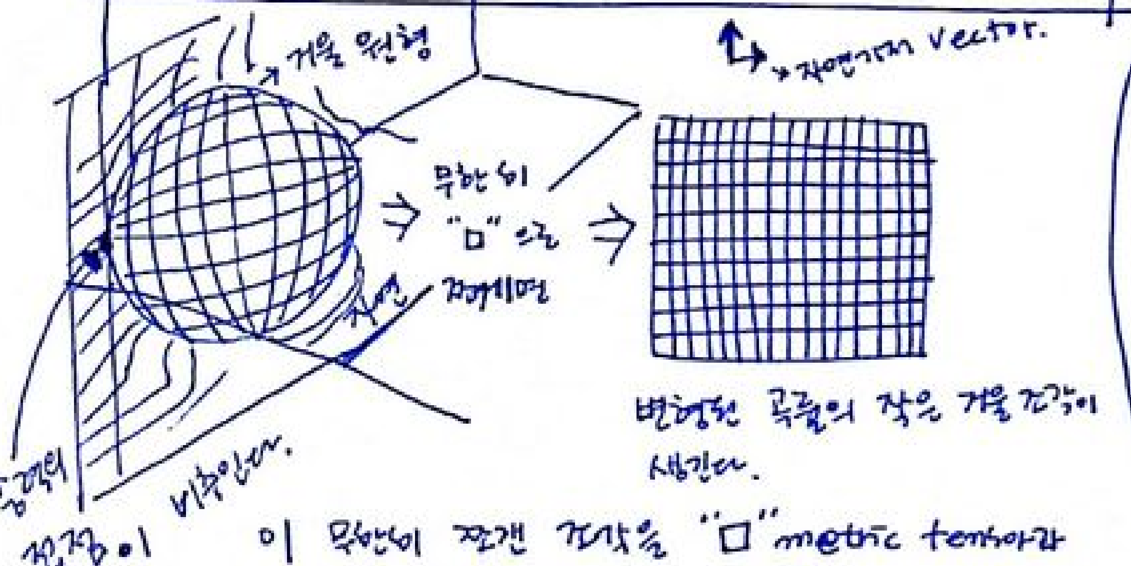
크리스토펠

"신의 방정식"
책 찾아보세요.

$$\boxed{R^{\alpha}_{\mu\sigma\nu;e} + R^{\alpha}_{\mu\nu e;\sigma} + R^{\alpha}_{\mu e\sigma;\nu} = 0}$$

⇐ Bianchi 항등식 "Tip"

1. 2. 3 의 원리를 적용하고도
(등가, 일반 공변, 근접 이론)
에너지 보존 법칙에 위배되었다.
이것을 "0"의 값을 만들기 위해
도출한 공식이 있었다. 그러나 이 공식은
이탈리아 수학자 Bianchi에 의해
이미 계산되어 있었다.



이 무한히 쪼갠 조각을 "ㅁ" metric tensor라 한다. 결국 이렇게 무한소의 거울 조각에 자연이 투영되어 진실을 비추고 있다.
자연이 작은 거울 조각인 metri tensor에 비춘다.
그리고 아인슈타인은 그 조각을 이용해 다식을 유도해냈다.

자연기저 Vector와
metric tensor의
아버지가 만든 수식이
"일반 상대성 이론"이다.

공식을 유도하는 방식이 학자마다 다르다. 수식의 전환을 "Rotation"이라 한다.
Rotation 하는 수식을 일단 외우고 다른 방법을 정확하게 알 수 있다.

vector (x^0, x^1, x^2, x^3)

$$R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma;\nu} + R^{\alpha}_{\mu\sigma\nu;\rho} + R^{\alpha}_{\mu\nu\rho;\sigma} = 0$$

(유로시 우그마)

$g^{\mu\rho},\ \nu \to \alpha$

집어 넣는다

$$(g^{\mu\rho} R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma})_{;\alpha} + (g^{\mu\rho} R^{\alpha}_{\mu\sigma\alpha})_{;\rho} + (g^{\mu\rho} R^{\alpha}_{\mu\alpha\rho})_{;\sigma} = 0$$

$$g^{\mu\rho} R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma} = g^{\mu\rho} R^{\alpha}_{\rho\sigma\mu} = g^{\mu\rho} R^{\alpha}_{\sigma\mu\rho} = R^{\alpha}_{\sigma}$$

$$g^{\mu\rho} R^{\alpha}_{\mu\sigma\alpha} = g^{\mu\rho} R_{\mu\sigma} = g^{\rho\mu} R_{\sigma\mu} = R^{\rho}_{\sigma}$$

날라가고

$$g^{\mu\rho} R^{\alpha}_{\mu\alpha\rho} = g^{\mu\rho}(-R^{\alpha}_{\alpha\mu\rho}) = -R^{\alpha}_{\alpha} = -R$$

$$R^{\alpha}_{\sigma;\alpha} + R^{\rho\,\to\alpha}_{\sigma;\rho\,\to\alpha} - R_{;\sigma} = 0$$

$$2R^{\alpha}_{\sigma;\alpha} - R_{;\sigma} = 0 \to R^{\alpha}_{\sigma;\alpha} - \frac{1}{2}R_{;\sigma} = 0$$

$$R^{\alpha}_{\sigma;\alpha} - \frac{1}{2}R_{;\sigma} = 0$$

모두 α로 바꾸고 넣을 때

$$\boxed{\delta^{\alpha}_{\sigma} = 1 \quad \alpha = \sigma \\ = 0}$$

$$R^{\alpha}_{\sigma;\alpha} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\sigma} R_{;\alpha} = 0$$

$$(g^{\rho\sigma} R^{\alpha}_{\sigma} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\sigma} g^{\rho\sigma\,\to\alpha} R)_{;\alpha} = 0$$

$$(R^{\rho\alpha} - \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}R)_{;\alpha} = 0$$

kT (7페이지 위의 공식 처럼)

우주에 있는 모든 것을 설명

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \boxed{\kappa T^{\mu\nu}}$$

$$= \frac{8\pi G}{C^4} T^{\mu\nu}$$

이 공식은 외워야 블랙홀을 이해할 수 있다.

분자당 질량 × 4차원의 속도

$$T^{\mu\nu} = \sigma_0 C^2 u^{\mu} u^{\nu}$$

꼭 외워!

$$\boxed{R^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}}$$

$$R^{00} = -\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}_{00}$$

일반 미분

$$\Gamma^{\rho}_{ij} = \frac{1}{2}g^{k\rho}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})$$

$$\Gamma^{\rho}_{00} = -\frac{1}{2}g^{k\rho}g_{00,k} = -\frac{1}{2}\nabla g_{00}$$

$$R_{00} = -\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(-\frac{1}{2}\nabla g_{00}\right) = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}$$

$$g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} R = k g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$$

$R^{\mu\nu} \to \Gamma_{\cdot\cdot} \to g_{\cdot\cdot} \to \phi$

지오데식

접이 없는.

$$R - \frac{1}{2}\cdot 4R = -R = kT$$

$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$

계속 k 값을 구하는 공식이다.

$R^{00} \to k$

기존 고전 이론

일반 상대성 이론

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 c^2 u^\mu u^\nu$$

$$R^{\mu\nu} = k\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\right) \to R^{00} = k\left(T^{00} - \frac{1}{2}g^{00}T\right)$$

R^{00}

$$T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = g_{00}T^{00} = \frac{1}{g^{00}}T^{00} \qquad T^{\mu\nu} = \rho c^2 \left(\begin{smallmatrix} T^{00} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{smallmatrix}\right)$$

$$R^{00} = k\left(T^{00} - \frac{1}{2}g^{00}\frac{1}{g^{00}}T^{00}\right) \qquad \Rightarrow T^{00} = \rho c^2$$

$$= \frac{k}{2}T^{00} = \frac{k}{2}\rho c^2 \to \text{6번째 아래로}$$

질량(밀도)

※ 지오데식 geodesic eq.

$$\boxed{\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\ \ \mu}u^\alpha u^\beta = 0}$$

$$u^\mu = \frac{\partial \vec{x}^\alpha}{\partial s} = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}$$

4차원의 속도 vector

∇ = 중력장의 세기 force

ϕ = 중력장 그 자체

$$\vec{x} = (ct, x, y, z)$$

$$d\vec{x} = (cdt, dx, dy, dz) = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial s}\right) + \Gamma_{\alpha\beta}^{\ \ \mu}u^\alpha u^\beta = 0$$

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\ \ \mu}u^\alpha u^\beta = 0$$

g_{00} (메트릭 tensor의 시간성분)

(에너지 $\xrightarrow{\text{미분}}$ 힘, 힘 $\xrightarrow{\text{적분}}$ 에너지)

$$(dx^0)^2 = \frac{d^2x^\mu}{c^2dt^2}\left(\cancel{\frac{dx^0}{ds}}\right)^2 + \Gamma_{00}^{\ \ \mu}\left(\cancel{\frac{dx^0}{ds}}\right)^2 = 0$$

적용

$$\phi = \frac{GMm}{r}$$

$$g_{00} = \frac{2\phi}{c^2} = 1.7\times10^{-9}$$

빛이 $\frac{1}{10^9}$ 정도의 각으로 휜다.

그래서 우주가 평평하다고 착각하며 살고 있다.

어떤 포텐셜 에너지의 미분이 벡터가 된다.

$$\underbrace{m\frac{d^2x^\mu}{dt^2}}_{F=ma} = -c^2\Gamma_{00}^{\ \ \mu} = \vec{\nabla}\phi \qquad \Rightarrow F=ma$$

크리스토펠은 미분 계수 값이다. ← 를 미분

→ potential (natural basis vector)

$$= -c^2\frac{-1}{2}\nabla g_{00} = \nabla\phi$$

$$R_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2\left(\frac{2\phi}{c^2}\right) \qquad \text{potential energy} \quad \boxed{\nabla^2\phi = 4\pi G\rho} \text{ 기존 고전 이론}$$

$= R^{\mu\nu}$ 밀도

$$= \frac{1}{c^2}\nabla^2\phi = \frac{1}{c^2}4\pi G\rho = \frac{k\rho c^2}{2}$$

$$k = \frac{2}{\rho c^2}\frac{4\pi G\rho}{c^2} = \boxed{\frac{8\pi G}{c^4}}$$

field = 좌표의 값으로 표시된 물리량

$$\vec{x} = (ct, x, y, z)$$
$$= (x^0, x^1, x^2, x^3) = x^\mu$$

$$d\vec{x} = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$$

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i = \vec{g}_x d\xi^i \qquad \vec{g}_i = \frac{\partial x}{\partial \xi^i}$$

$$(d\vec{x})\cdot(d\vec{x}) = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i\right)\cdot\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i\right) = (\vec{g}_i d\xi^i)\cdot(\vec{g}_j d\xi^i)$$

$$d\vec{x}\cdot d\vec{x} = ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j \qquad = g_i g_j d\xi^i d\xi^j \equiv g_{ij} d\xi^i d\xi^j$$

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$$

$$= (dx^0, -dx^1, -dx^2, -dx^3)\begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$$

$4\times4 = 1\times4 \quad 4\times1 = 1$

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

☆ 공부는 등고선을 그리는 작업이다.

$$dx^0 = c\,dt$$

나는 멈춰있지만 광속의 속도로 이동하고 있다.

$$ds = dx^0\sqrt{1 - \left[\left(\frac{dx^1}{dx^0}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dx^0}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dx^0}\right)^2\right]}$$

$$= dx^0\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2\right]}$$

$$\underline{ds} = dx^0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = dx^0\sqrt{1-\beta^2}$$

proper time
고유시간

$$T^{\mu\nu} = \rho\, c^2 u^\mu u^\nu$$

4차원의 시간을 통한 속도 공식이다.

입자 물리학은 상대론적 시간 모멘텀
에너지 모멘텀 이다.

4차원 속도 vector

$$u = \frac{d\vec{x}}{ds} = \left(\frac{dx^0, dx^1, dx^2, dx^3}{ds}\right) = \frac{(dx^0, d\vec{r})}{dx^0\sqrt{1-\beta^2}}$$

3차원 속도 $= v$ $\beta = \frac{v}{c}$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \,\middle|\, \frac{d\vec{r}}{c\,dt\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

4차원에서 속도 vector는 $\boxed{\text{단위가 없다}}$

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \,\middle|\, \frac{v}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

4원 속도

일반 공변성은 [illegible] 무관하다.

$$ds = dx^0\sqrt{1-\beta^2}$$

= interval

- 3차원에서는 길이
- 4차원에서는 interval

$$p^\mu = mc\,\underline{u}$$

4차원 모멘텀 (질량×속도)

4차원이기에 無 차원이 된다

$$= \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}} \,\middle|\, \frac{m\cancel{c}v}{\cancel{c}\sqrt{1-\beta^2}}\right) =$$

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = k \Rightarrow mc^2 = k + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = k \Rightarrow mc = k + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$v \lll c$

$$\boxed{W \underset{(\text{근사치})}{\cong} m\cancel{c^2}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right) - \cancel{mc^2}}$$

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cong 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

$$W = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\boxed{E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2}$$

입자 물리학에서 입자 가속기의 현상을 설명

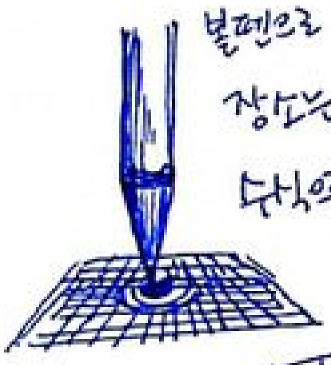
4차원 공식에서 나온 공식이다

특수 상대성 이론이 "5"라면 일반 상대성 이론은 "95"이다.

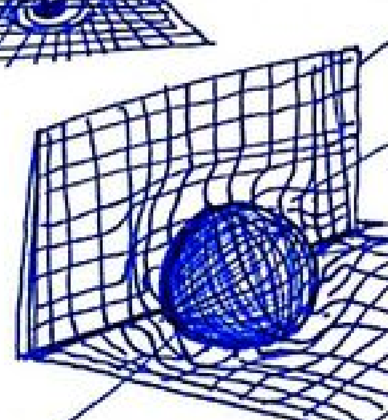
4차원에서의 수식에서 (모든 공식이 증명된다.

2013. 03. 24 18:50

우리의 인식세계를 넘어선 현상이 있다. 인간의 개념을 벗어났을 때 우리는
그것을 알 수 없다. 일반상대성 이론에서 설명하는 현상은 수식으로만 설명된다.
그러나 그 수식이 리얼하게 작동하고 있다. 수백만명을 죽음으로 몰아간
핵폭탄의 현상이 그 최고의 일례이다. 수식을 접하고 풀면 그 수식을
풀면서 알게된 세계가 존재함을 알게 된다.
그래서 엘리베이터의 끈이 끊겼을 때 우리는 중력을 느낄 수 없다는 사실만
안다.
엘리베이터의 중력이 사라졌으니 우리 몸의 중력을 직접적으로 느껴야 하는데
그 중력이 사라졌다. 중력은 힘이 아닌 현상이 된다.



볼펜으로 한 지점을 누르고 있다고 하자. 십 분 후에 그 지점은 같은 장소인가. 시간이 지난
장소는 이미 지나간 장소가 된다. 이것을 우리의 인식은 알 수 없다.
수식으로만 알 수 있는 세계이다. 수식이 곧 인식이며 이해이다.



중력장에 의해
곡률이 발생한다. 이때
중력을 가진 물체와 접하는 시공간이 등장한다.
만약 이것을 거울 형태의 물체라고 하면 그 공간은
물체 위에 비추어지게 된다. 이 비춰진 공간을
metric tensor 라고 한다. 이 metric tensor의
Vector를 "natural basis Vector"라고 한다.

시공간을 계산하는 수식이 이 metric tensor와 'natural basis Vector를 통해
계산이 되어 진다. 우리 그림 또한 (시간)이 빠져 있다. 3차원의 Index로만 이해하는 것이
우리의 한계다.

핵심은 인식세계를 통해 우주를 이해하는 것이 아니라, 수식 세계의 인식을 통한
이해가 필요하다. 새로운 나라를 갈 때 새로운 언어를 익히는 것처럼 리얼한 자연을
수식으로 접하는 것이 필요하다.

리얼한 자연을 영원히 접할 수 없는 우리가 리얼한 자연을 느낄 수 있는 것은
상대성 이론을 통해서 이다. "수식을 외우고 익히면 알게 되는 세계이다"