"∴ 4차원 위치 벡터, 4차원 속도 벡터 that's all"

제 4회 137억년 우주진화

3강, 2013. 04. 07.

#. x^μ <4차원 Vector>

Point의 이동이기에 "d"를 넣어준다.

4원 위치 벡터

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \to dx^\mu = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) = d\vec{x}$$

공식을 적는데 철학 이런 것 필요 없다.

'앗! 뜨거라' 해야 한다. 기계적으로 써라.

"표현" that's all.

표현이 되지 않으면 고민할 수 없다.

중요한 것에 attention 하지 않는다.

중요한 것에 멈추어라.

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$$

$$x^\mu x_\mu = x^0 x_0 + x^1 \underset{\to -x^1}{x_1} + x^2 \underset{\to -x^2}{x_2} + x^3 \underset{\to -x^3}{x_3}$$

$$= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

$$\boxed{ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

$$g^{\mu\nu} x_\nu = x^\mu$$

$$(x_0, x_1, x_2, x_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = x^0, -x^1, -x^2, -x^3$$

1×4

4×1 ⇒ 1

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$= dx_\nu dx^\nu$$

이렇게 내려오는 것에 집중

$$ds^2 = dx_\nu dx^\nu = dx^\nu dx_\nu$$

$$ds^2 = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)(dx^0, -dx^1, -dx^2, -dx^3)$$

$$= (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \qquad \boxed{dx^0 = c\,dt}$$

$$ds = dx^0 \sqrt{1 - \left(\frac{dx^1}{dx^0}\right)^2 - \left(\frac{dx^2}{dx^0}\right)^2 - \left(\frac{dx^3}{dx^0}\right)^2}$$

$$= dx^0 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2\right]}$$

정한 것이다.

$$\boxed{ds = dx^0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

막다른 골목에서 정했다. 하다 하다 안되서 에잇! 모르겠다 하고 공식의 값을 정했다.

4차원의 간극을 알게 되었다.

속도는 'Vector'이다. 4차원에서 움직임은 방향을 알고 있다. 이따

"방향이 운명이다."

4차원에서 속도가 중요한 것은 속도가 방향과 속도의 양이 정해져 있기 때문이다.

$x^0 = x^0$

$\boxed{x_1 = -x^1}$

으로 정했다.

3차원에서 속도는 거리를 시간으로 나눈다. $v = \frac{dx}{dt}$ 이다.

4차원의 속도 공식은

이것은 왜 그렇게 되었는지 중요한 것이 아니라 정하고 보니 공식이 맞아들어갔다. 그리고 자연의 법칙이 손을 들어 주었다.

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{(dx^0, \overset{dx^1, dx^2, dx^3}{d\vec{r}})}{dx^0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

4원 속도 벡터

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \middle| \frac{d\vec{r}}{c\,dt\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$\boxed{\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \middle| \frac{v}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right)}$$

4원 속도 벡터

$$= (u_0 | u_1\ u_2\ u_3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} ds &= dx^0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= dx^0 \sqrt{1 - \beta^2} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \,\Big|\, \frac{v}{c\sqrt{1-\beta^2}} \right)} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$p^\mu = mc\,\underset{\text{4원 속도 벡터}}{\vec{u}} = \left(\overset{=p}{\frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}} \,\Big|\, \overset{=p^i}{\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}} \right)$$

4차원을 안다는 것은
모멘텀과 에너지를 아는 것이다.
3차원에서는 공간성분만 있다.
그러나 4차원은 시간 성분과
공간성분 2가지를 갖는다.

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{x} = \int \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dt}\cdot dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(mv) = m\underset{(a)}{\frac{dv}{dt}} = ma = \vec{F} \\ &F = ma \Rightarrow F = \frac{dp}{dt} \end{aligned}}$$

뉴턴 법칙

모멘텀을 시간으로 미분

상수로 봐야 한다.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$= m\frac{dv}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) + mv\frac{d}{dt}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$-\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{-2v}{c^2}\frac{dv}{dt}$$

$$= \left(\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{mv^2}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right)\frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{m\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)c^2 + mv^2}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{dv}{dt} = \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{dv}{dt}$$

물리학에 나오는 미분 공식과
물리 공식이 10개를 넘지
않는다. 외워라!

뉴턴의 법칙은 미분의 세계이다.
그러나 우주의 법칙은
적분의 세계로
임의의 상수를
적용할 수
있다.

$$\int x^{-a}\,dx = \frac{x^{-a+1}}{-a+1}$$

$$x \to x^2$$

$$x^3 \to x^4$$

적분을 하게되면
물리적 성분이 포함되게
된다.

적분을 하면 임의의
상수가 붙는다.

$$W = \int \frac{mv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\,dv = \int \frac{mv}{x^{\frac{3}{2}}}\,\frac{-c^2}{2v}\,dx$$

$$\boxed{1-\frac{v^2}{c^2} \equiv x} \to d\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = dx$$

$$\frac{-2v}{c^2}\,dv = dx$$

적분의 하한선이 있다. 우주의 어떤 속도도 광속을 넘을수
없다. 결국 x의 하한선은 "0"

$$d(1) = 0 \qquad d\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) = -\frac{1}{c^2}(2v\,dv)$$

$$W = \frac{-mc^2}{2}\int_1^x x^{-\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{-mc^2}{2}\frac{\left[x^{-\frac{3}{2}+1}\right]_{x=1}^{x}}{-\frac{3}{2}+1} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)_{x=1}^{x}$$

$$= mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$$

에너지의 세계는
적분의 세계이다.

운동에너지 $= K$ (kinetic)

정지 질량

$$\boxed{W = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) - mc^2}$$

$$\boxed{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = k + mc^2}$$

// E

$$\boxed{\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$ γ 벡터

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \gamma mc^2$$

$$P = \underbrace{\gamma mV}$$

4차원 모멘텀

4차원에너지.

$$E^2 = \gamma^2 m^2 c^4 = m^2 c^4 \left(\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)$$

$$= m^2c^4 \frac{c^2}{c^2-V^2} = m^2c^2 \frac{c^2(c^2-V^2)+(c^2V^2)}{c^2V^2}$$

$$= m^2c^2\left(c^2+\frac{c^2V^2}{c^2-V^2}\right) = m^2c^2\left(c^2+\frac{V^2}{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)$$

$$= m^2c^4 + \underbrace{m^2c^2V^2\gamma^2}$$

$$= (mc^2)^2 + (pc)^2$$

$$\boxed{E = \sqrt{(mc^2)^2+(pc)^2}}$$

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$$ 에너지 운동량 tensor

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 c^2 U^\mu U^\nu$$

텐서 스칼라

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}$$

Energy density, energy flux, momentum density, momentum flux, pressure

에너지 모멘텀 텐서

$$\beta^i = \frac{V^i}{c^i}$$

$$T^{00} = \rho_0 c^2 U^0 U^0$$

$$= \rho_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\rho_0}{1-\beta^2}c^2 = \rho c^2$$

$$T^{0i} = \rho_0 c^2 U^0 U^i = \frac{\rho_0}{1-\beta^2}c^2\frac{V^i}{c}$$

$$= \rho c^2 \beta^i$$

$$T^{ij} = \rho_0 c^2 U^i U^j$$

$$= \frac{\rho_0}{1-\beta^2}c^2\beta^i\beta^j$$

$$= \rho c^2 \beta^i \beta^j$$

$$T^{\mu\nu} = \rho c^2 \begin{pmatrix} 1 & \beta^1 & \beta^2 & \beta^3 \\ \beta^1 & \beta^1\beta^1 & \beta^1\beta^2 & \beta^1\beta^3 \\ \beta^2 & \beta^2\beta^1 & \beta^2\beta^2 & \beta^2\beta^3 \\ \beta^3 & \beta^3\beta^1 & \beta^3\beta^2 & \beta^3\beta^3 \end{pmatrix}$$

물리학은 단순하다.

물리학의 최종량은 작용량 이다. (Action)

작용량과 같은 값이 H (프랑크상수) 이다.

최종 법칙은 최소 작용 원칙이다.

모든 법칙이 최소작용 원칙에서 유도된다.

알아야 할 것은 작용 하나이다.

최소 작용 법칙이 자연 과학이다.

위치, 속도 that's all!

위치 ⇒ 간극 ⇒ 4원속도 벡터 X 질량 ⇒ 4원 모멘텀 ⇒ 4원 에너지 ⇒ 원자목적 ⇒ 정지질량 X 운동질량 ⇒ total E ⇒ 모멘텀

$$\frac{v}{c} \ll 1 \Rightarrow \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

우리가 사는 세계.
1보다 훨씬 작은 속도의 세계.

$$W = mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) - mc^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E = K\cdot E + P\cdot E = \frac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r})$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{(mv)^2}{2m} + V(\vec{r})$$

(v) potential 에너지

위치의 함수

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(r)$$

헤밀토니안

양자역학은 헤밀토니안의 세계이다.

$$\boxed{\underset{(E)}{H} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \vec{P} \to -i\hbar\nabla = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}}$$

양자의 세계의 "passport"가 된다

슈레딩거 eq.

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi}$$

(프사이)

슈레딩거 방정식 : 주개울표.

$\psi^* \times \square \qquad \psi \times \square^* \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$

ρ (노벨 물리학상)

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J} = 0}$$

발산 방정식
유입 유출의 합이 "0"이 되는 개념

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$$

$$\boxed{\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi = (mc^2)^2\psi + (-i\hbar c\nabla)^2\psi}$$

↳ 클라인-고든 eq.
K-G

$\psi = e^{ix}$ 해준다.

$\psi = a+bi$

$\psi\psi^* = (a+bi)(a-bi)$

입자가 $= a^2+b^2$

발견될 확률

이 수식에는 광속이 빠져 있다.
리얼 세계가 적용되지 않는다.
광속을 적용한 공식은 어떻게 되는가?

우리의 세계는 광속의 세계이다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \leq 0$$

↳ ρ → 확률 밀도

$$E = \pm\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$$

$-i\hbar\nabla$ 양자화

1920년도 "디락"이 푼 공식

파울리 메트릭스.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-i\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + (mc^2)\beta\right)\psi$$

뭔지 모르지만 α와 β를 집어 넣는다.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} + i\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi - mc^2\beta\psi = 0$$

$\vec{\nabla} \to \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\,\vec{\alpha}\cdot\nabla\right)\psi - mc^2\beta\psi = 0$$

$\times \frac{\beta}{c}$

$$i\hbar\left(\beta\frac{\partial}{c\,dt} + \beta\vec{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\psi - mc\beta^2\psi = 0$$

$$i\hbar\left(\beta\frac{\partial}{dx^0} + \beta\vec{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\psi - mc\,\overset{=1}{\beta^2}\psi = 0$$

역사적인 순간 - 일반인이 디락 방정식을 푸는 순간

$$\boxed{\gamma^i = \beta\alpha^i}$$

$$\beta = \gamma^0 \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$$i\hbar\left(\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\psi - mc$$

4×4.

$$\beta = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & (\quad) \\ (\quad) & (\quad) \end{pmatrix}$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = 1$$

단위 행렬

$$i\hbar\left(\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)\psi = 0$$

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0$$

$$i\hbar\partial_\mu = \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}} = p_\mu$$

$$\boxed{\vec{p} \to -i\hbar\nabla = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}}$$

$$\boxed{(\gamma^\mu p_\mu - mc)\psi = 0}$$

Dirac eq.
공변미분

$$\boxed{p^\mu = mc\vec{u} = \left(\underbrace{\frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}}_{=p^0} \,\Big|\, \underbrace{\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}}_{=p^i}\right)}$$

$$(\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i - mc)\psi = 0$$

$$(\gamma^0 p^0 - \gamma^i p^i - mc)\psi = 0$$

$$\gamma^0 = \beta \quad p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma mc \quad E = \gamma mc^2 \quad p^0 = \frac{E}{c}$$

$$\gamma^0 p^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\frac{E}{c} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} & 0 \\ 0 & -\frac{E}{c} \end{pmatrix}$$

$i=1,2,3$
$\Rightarrow x, y, z$

$\gamma^i = \beta\alpha^i$ 　 $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$ 　 $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(행렬)
파울리 매트릭스

$$\gamma^i = \beta\alpha^i = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^i p^i = \vec{\gamma}^i \cdot \vec{p} \qquad \gamma^i \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_-|p\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |n\rangle$$

중성자

$$I_+|n\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

양성자

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)\psi = 0$$

$$(\gamma^0 p^0 - \gamma^i p^i - mc)\psi = 0 \qquad \psi = \begin{pmatrix} u_A \\ u_A \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{E}{c} & 0 \\ 0 & -\frac{E}{c} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} mc & 0 \\ 0 & -mc \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

내부대칭

$$\begin{pmatrix} \frac{E}{c} - mc & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -\frac{E}{c} - mc \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{E - mc^2}{c} & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -\frac{E - mc^2}{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

* 갈루아

대두 방정식에 솔루션의 치환관계를 Grouping 하였다.

리 ⇒ 미분 방정식의 근의 솔루션의 치환관계 그룹핑 하였다.

미분 방정식의 솔루션이
137억년 우주 진화의 이야기이다.

$$\frac{E-mc^2}{c}u_A - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,u_B = 0$$

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,u_A - \frac{E+mc^2}{c}u_B = 0$$

$$u_A = \frac{c}{E-mc^2}(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})u_B$$

$$u_B = \frac{c}{E+mc^2}(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})u_A$$

$$\vec{p}\cdot\vec{\sigma} = P_x\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + P_y\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} + P_z\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}P_z & P_x-iP_y\\ P_x+iP_y & -P_z\end{pmatrix} \qquad (\vec{p}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{p}^{\,2}$$

① $u_A = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rightarrow u_B = \dfrac{c}{E+mc^2}\begin{pmatrix}P_z & P_x-iP_y\\ P_x+iP_y & -P_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$u_B = \frac{c}{E+mc^2}\begin{pmatrix}P_z\\ P_x+iP_y\end{pmatrix}$$

② $u_A = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rightarrow u_B = \dfrac{c}{E+mc^2}\begin{pmatrix}P_z & P_x-iP_y\\ P_x+iP_y & -P_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$u_B = \frac{c}{E+mc^2}\begin{bmatrix}P_x-iP_y\\ -P_z\end{bmatrix}$$

③ $u_B = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rightarrow u_A = \dfrac{c}{E-mc^2}\begin{pmatrix}P_z & P_x-iP_y\\ P_x+iP_y & -P_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$u_A = \frac{c}{E-mc^2}\begin{pmatrix}P_z\\ P_x+iP_y\end{pmatrix}$$

④ $u_B = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rightarrow u_A = \dfrac{c}{E-mc^2}\begin{pmatrix}P_z & P_x-iP_y\\ P_x+iP_y & -P_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$u_A = \frac{c}{E-mc^2}\begin{pmatrix}P_x-iP_y\\ -P_z\end{pmatrix}$$

Dirac eq. 에서
antimatter, spin up, spin down 이
4개있다.

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$$

$$E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

antimatter
(반물질)

$$E = \pm mc^2 \rightarrow \begin{cases} ①,② \rightarrow E = mc^2 \\ ③,④ \rightarrow E = -mc^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{E-mc^2}{c} & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & -\frac{E+mc^2}{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_A\\u_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\psi = \begin{pmatrix}u_A\\u_B\end{pmatrix}$$

spin-up $= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

spin-down $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$u^{(1)} = N\begin{bmatrix}1\\0\\ \frac{cP_z}{E+mc^2}\\ \frac{c(P_x+iP_y)}{E+mc^2}\end{bmatrix}$$

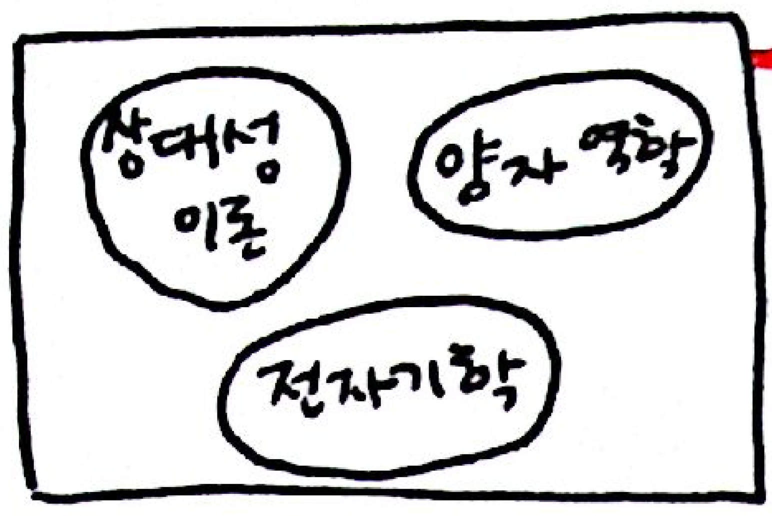
$$u^{(2)} = N\begin{bmatrix}0\\1\\ \frac{c(P_x-iP_y)}{E+mc^2}\\ \frac{-cP_z}{E+mc^2}\end{bmatrix}$$

$$u^{(3)} = N\begin{bmatrix}\frac{cP_z}{E-mc^2}\\ \frac{c(P_x+iP_y)}{E-mc^2}\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

spinor

$$u^{(4)} = N\begin{bmatrix}\frac{c(P_x-iP_y)}{E-mc^2}\\ \frac{-cP_z}{E-mc^2}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

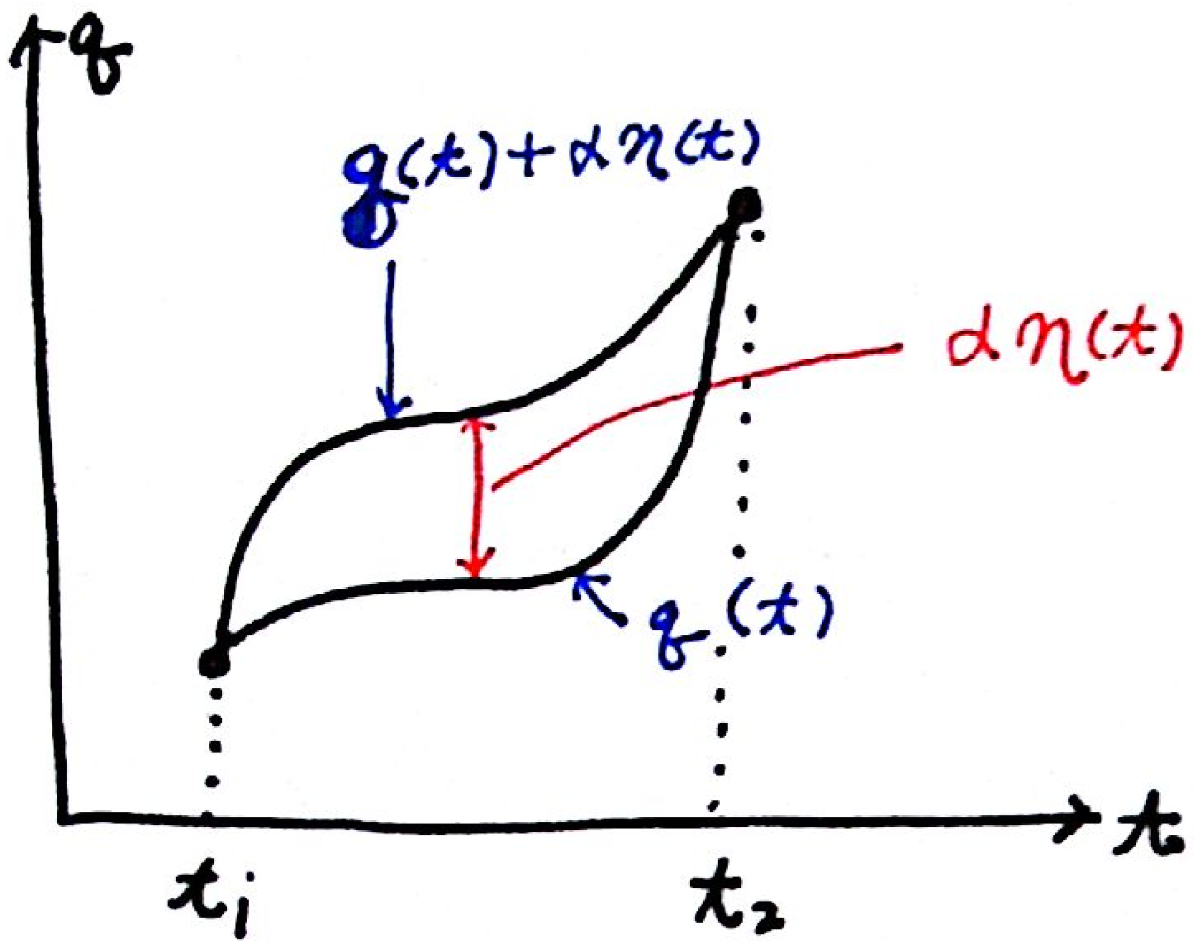
$$N = \sqrt{\frac{(|E|+mc^2)}{c}}$$



→ 모두를 담는 역학

"라그랑지 역학"

= 운동 에너지와 위치 에너지로 모든 것을 설명하려 했다.



$$\boxed{q(\alpha,t)=q(t)+\alpha\eta(t)}$$

$$S(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2} L\,(q(\alpha,t),\ \dot{q}(\alpha,t),\ t]\,dt$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}=\int_{t_1}^{t_2}\Big(\frac{\partial L}{\partial q}\overbrace{\frac{\partial q}{\partial \alpha}}^{\eta}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\overbrace{\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha}}^{\frac{\partial \eta}{\partial t}}\Big)dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\Big(\frac{\partial L}{\partial q}\eta+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \eta}{\partial t}\Big)dt$$

$$(xy)'=x'y+xy'$$

$$\int(xy)'=\int x'y+\int xy'$$

$$\int xy'=xy-\int x'y$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \eta}{\partial t}dt=\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\eta\Big|_{t_1}^{t_2}}_{\to 0}-\int\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big)\eta\,dt$$

$$xy' \Rightarrow y=\eta$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}=\int_{t_1}^{t_2}\eta\Big[\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big)\Big]dt$$

$$=0$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big)=0}$$

오일러-라그랑지 eq. 1744. 영조 20년

$$\frac{\partial L}{\partial q}=0\to\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big)=0\to\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\equiv P$$

운동상수

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0\to\frac{d}{dt}(\dot{q}P-L)=0$$

$$\to\dot{q}P-L\equiv H$$

$$\frac{\partial}{\partial t}L(q,\dot{q})=\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial t}$$

상수

$$=\dot{q}\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q}=\dot{q}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q}$$

$$=\frac{d}{dt}\Big(\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big)\qquad \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-L\equiv H$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-L\Big)=0$$

$$\boxed{\dot{q}P-L=H}$$

$$\dot{P}=\frac{\partial L}{\partial q}$$

뉴턴 역학 $\vec{F}$ 힘 $\vec{P}$

라그랑지 역학 운동에너지, 위치에너지 에너지

에너지 · 시간 ⇒ 작용

최소 작용 법칙 = 해밀톤 법칙.

$$L=T-V=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}kx^2\qquad \frac{\partial L}{\partial q}=-kx\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=mv$$

$$-kx-\underbrace{\frac{d}{dt}(mv)}_{ma}=0\qquad ma=-kx\quad F=-kx$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0}$$

오일러-라그랑지 eq.
1744. 영조20년

물리학은 에너지와 모멘텀으로 되어 있다

모멘텀이 바뀌지 않는다 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar I.$

모멘텀이 보존된다

모멘텀은 공간 에너지 대칭이다.

$$\boxed{\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}}$$

해밀턴eq.

$[q, H] = \dot{q}$

$[P. H] = \dot{p}$

$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q} = 0}_{\text{공간대칭}} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \equiv p$ = 상수(운동량)

각운동량 보존의 법칙.

$\boxed{\frac{\partial L}{\partial t} = 0}$ $\qquad L(q.\dot{q})$

$$\frac{\partial}{\partial t} L(q.\dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q}$$

$$= \dot{q}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} = \frac{d}{dt}\left(\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

에너지가 보존된다는 말

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L\right) = 0 \qquad \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \equiv H$$

(상수가 되어야 한다.)

공간 대칭으로 모멘텀이 유지되고 시간 대칭으로 에너지가 보존 된다.

공간대칭 모멘텀의 상수를 요구한다.
(운동량)
대칭은 변화가 없다는 의미이다.
시간에 대해 에너지가 보존된다는 것은 에너지 상수가 되어야 한다.

공간 대칭은 모멘텀의 상수를 요구하고
시간 대칭은 에너지의 상수를 요구한다.

대칭 ⟷	보존
‖	‖
변화 없음	상수

"자연은 운동량 보존 법칙과
에너지 보존 법칙이 존재한다"

$$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle = 0 \rightleftarrows [Q. H] = 0$$

교환자

보존

대칭

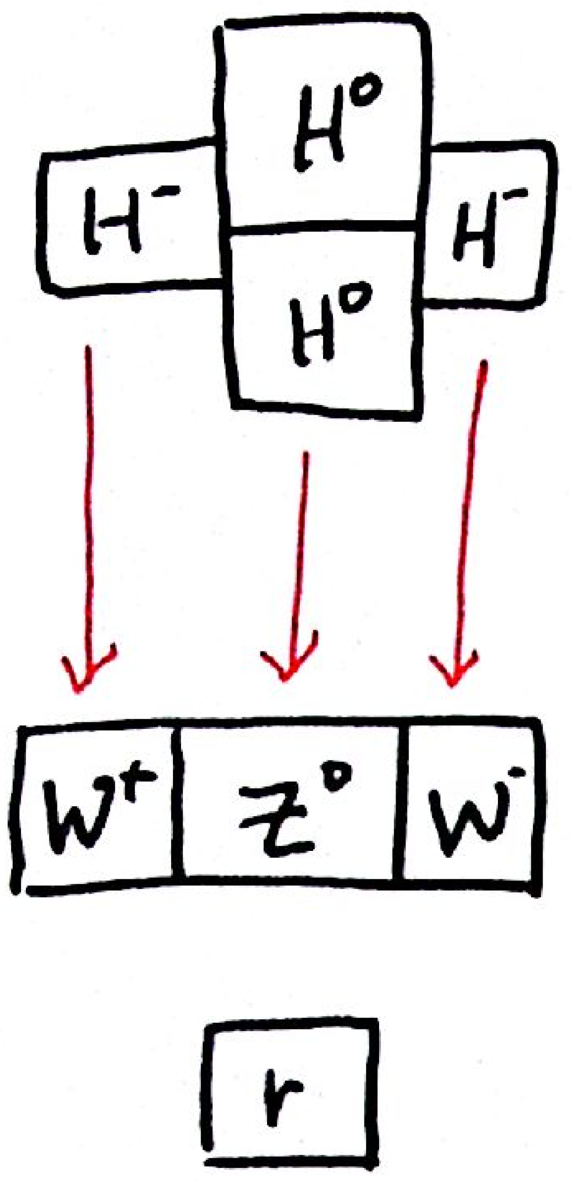
$$QH - HQ = 0$$

$$S = \int_i^f \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \qquad d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$$

: 필드와 필드의 간극

필드와 필드의 함수

$L(q, \dot{q})$ point와 point의 간극



Higgs boson

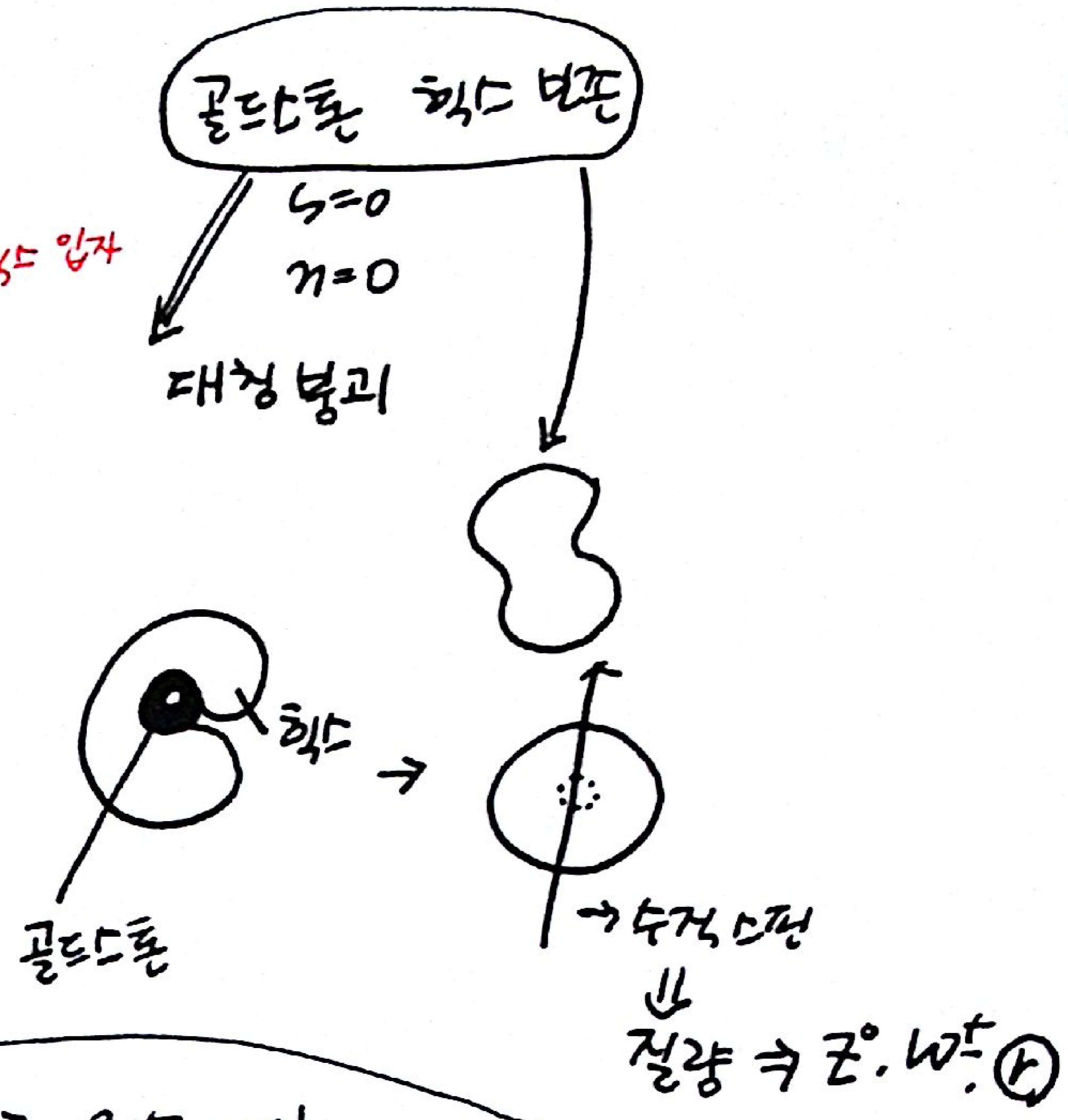
$4 = 3 + 1$ 힉스 입자

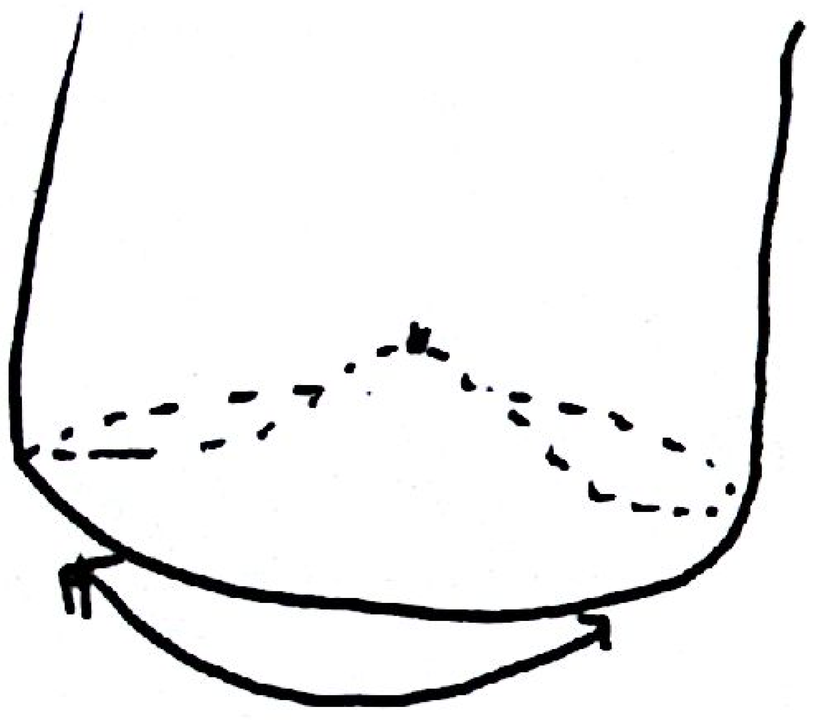
Weak boson

$4 = 3 + 1$

⇓

γ(광자)





지금 여기! 라고 부르는 순간 존재했다. 신은 부름에 응하는 자이다.

내 생각의 출연의 마지막 장을 읽어 보기를 바란다.

질량과 대칭은 서로 원수이다.

질량이 없으면 우주는 없다.

대칭이 깨어지며 질량이 나오고 우주가 나왔다.

우주는 힉스 입자로 쌓여 있고, Weak 입자는 갇혀 있다.

힉스 입자를 찾아내면 질량이 어디서 왔는지 알 수 있다.

힉스 장은 진공장이다.

† 모든 사물이 왜 존재할 수 있는가? 대칭이 깨어지며 질량을 획득되었다.

존재가 존재할 수 없다면 우주는 영원히 대칭성이 유지되었을 것이다. 그러나 대칭이 깨어지며 질량 탄생하고 존재가 있을 수 있다.