제 1회 137억년 우주 진화

4강 우주론 Ⅳ 2015년 4월 26일

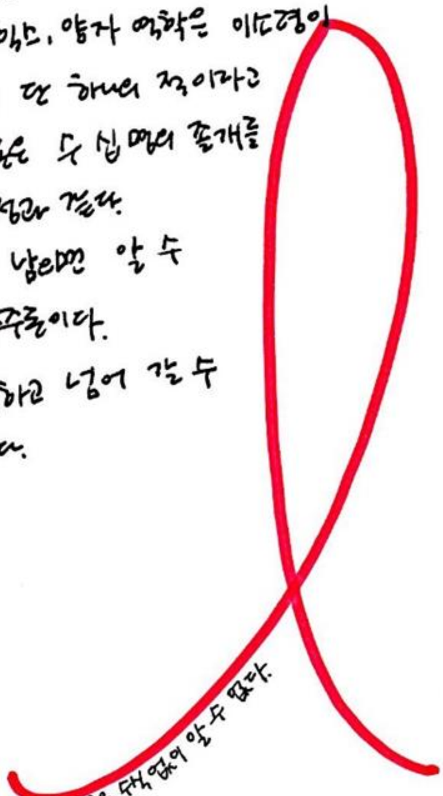
$$\boxed{f \rightarrow \frac{df}{d\eta} \rightarrow C[f] \rightarrow \Theta[\eta_0] \rightarrow S \rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}(\Theta e^{ik\mu\eta-\tau}) \rightarrow \bar{S} \rightarrow j_l \rightarrow \Theta_l(\eta_0)}$$

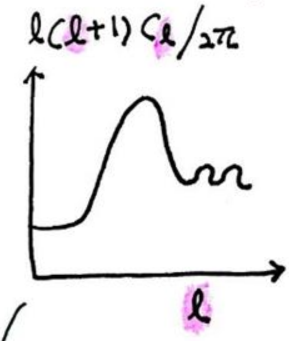
오늘 이야기는 포톤(빛)에 관한 내용이다. CMB 곡선에 대해 변수 4개 (방향, 길이, 위치, 컴포말 타임)에 대한 것이다.

우주론은 단 하나의 적을 만나는게 아니다. 수십개의 방정식이 연계되어 형성된 공부이다. 하나 하나의 공식은 서로가 서로 연결되어 값을 찾아 간다.

비교하자면 힉스, 양자 역학은 이소영이 만나는 강력한 단 하나의 적이라고 할 때, 우주론은 수 십 명의 졸개를 처리하는 과정과 같다. 한 명이라도 남으면 알 수 없게 되는게 우주론이다.

수식을 삭제하고 넘어 갈 수 없는 현상이다.





우주론을 알고 싶다면 이 곡선을 알아야 한다. x축이 "l"이라고 할 때 y축의 값은 무엇인지 안다면

우주론을 50% 이상 알 수 있다. y축의 값 $l(l+1)C_l/2\pi$의 값 중에 l을 아는 것이 오늘 우주론의 시작이다.

137억년 전의 우주를 찍은 사진을 수학적으로 바꾼 그래프이다. 사진을 도표를 바꿀 수 있는 핵심은 l 값을 아는 것이 핵심이다.

진짜 우주가 137억년이 되었는가? → 사진으로 찍었다.

<u>없는 걸 찍을 순 없지 않는가</u>

시간의 곡률을 모두 포함한 사진을 미분하여 정보를 분류해 내는 것이 이 시간의 강의 내용이다.

C=h=kb=1

광속 / 플랑크상수 / 볼쯔만 상수

$$\frac{df}{d\eta} = a \cdot c[f] \quad c = h = k_b = 1$$

photon을 전자가 치는 방정식이다.

전자와 광자의 충돌

우주의 photon 진동을 구하는게 핵심

4차원 공간의 위치 / 포톤이 날아가는 방위 벡터 / 4개의 변수 모두에 미분(전미분)

$$f(\vec{x}, p, \vec{n}, \eta) = \frac{1}{e^{p/T(\eta)[1+\theta(\vec{x},\vec{n},\eta)]}}$$

스칼라 / 포톤의 시간적 변화 (우주적 시간 변수

$$\theta(\vec{x}, \vec{n}, \eta) \equiv \frac{\delta T}{T}$$

1/10만의 온도 variation을 θ가 가지고 있다.

$$\frac{df}{dt} = c[f] \qquad \frac{df}{d\eta}\frac{d\eta}{dt} = \frac{df}{d\eta}\frac{1}{a} = c[f]$$

θ에 대해 푸는 방정식-볼쯔만 방정식

$$df = \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial n^i} dn^i$$

방향벡터 / 포톤이 가고 있는 방향 변수

$$\frac{df}{d\eta} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x^i}}_{\text{너무 작은 양이여서 무시}} \frac{dx^i}{d\eta} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{d\eta} + \frac{\partial f}{\partial n^i}\frac{dn^i}{d\eta}$$

에 대해 미분

$$\frac{dx^i}{d\eta} = \underbrace{n^i(1 - \Phi - \psi)}_{\text{메트릭 perturbation}} \qquad \frac{1}{p}\frac{dp}{d\eta} = -\mathcal{H} - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - n^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i}$$

이것만 남는다

$$ds^2 = a^2(\eta)[-(1+2\psi)d\eta^2 + (1+2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j]$$

$$g_{00} = -(1+2\psi) \quad g_{ij} = 1 + 2\Phi$$

Geodesic eq. for γ

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$$

n^i는 방향 → istropic → 1차 order

$$\frac{df}{d\eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \overset{\text{방향}}{n^i} \frac{\partial f}{\partial x^i} - p\frac{\partial f}{\partial p}\left(\mathcal{H} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i}\right)$$

우주에 pertubation이 없을 때 photon이 갖고 방정식은 0-order

zero-order $\Phi = \psi = 0$ $\quad \boxed{\frac{df}{d\eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial f}{\partial x^i} - p\frac{\partial f}{\partial p}\mathcal{H}}$ 이 때 photon이 갖는 방정식

first-order $\quad f = f_0 - p\frac{\partial f_0}{\partial p}\theta$

$$\frac{df}{d\eta} = -p\frac{\partial f_0}{\partial p}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial \theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i}\right)$$

바리온 입자 (중입자 (양성자, 중성자)의 음향 속도

$$C[f] = -p\frac{\partial f_0}{\partial p} n_e \sigma_T(\theta_0 - \theta + v_b \cdot \vec{n})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial \theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = \underbrace{n_e \sigma_T a}_{-\dot{\tau}}(\theta_0 - \theta - v_b \cdot \vec{n})$$

$\frac{\partial}{\partial x} \to ik$ $\quad \mu = \frac{\vec{k}\cdot\vec{n}}{k}$ $\quad n^i \frac{\partial}{\partial x^i} \to n^i \cdot (ik) = i\mu k$

길이 벡터를
파장벡터로

푸리에 공간으로 바꿔준다. 모멘텀 공간으로
바꾸어 주면 길이에 반비례 한다.

$$\dot{\Theta} + i\mu k\Theta + \dot{\Phi} + ik\mu\Psi = -\dot{\tau}(\Theta_0 - \Theta - \mu v_b)$$

1st-order Boltzman eq. for γ in Fourier space

$$S \equiv -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi - \dot{\tau}(\Theta_0 + \mu v_b)$$

$$e^{-(\ )} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\Theta e^{ik\mu\eta - \tau}\right) = \dot{\Theta} e^{(\ )} + \Theta ik\mu e^{(\ )} + \Theta e^{(\ )}(-\dot{\tau})$$

$$e^{-(\ )} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\Theta e^{ik\mu\eta - \tau}\right) = \dot{\Theta} + ik\mu\Theta - \dot{\tau}\Theta = \dot{\Theta} + (ik\mu - \dot{\tau})\Theta = S$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\Theta e^{ik\mu\eta - \tau}\right) = S e^{ik\mu\eta - \tau}$$

빅뱅 초기의 광학적 투명도

광학적 투명도

$$\Theta(\eta_0) e^{ik\mu\eta_0 - \underbrace{\tau(\eta_0)}_{\to 0}} - \underbrace{\Theta(0)}_{\to 0} e^{ik\mu\cdot 0 - \tau(0)} = \int_0^{\eta_0} d\eta\, S e^{ik\mu\eta - \tau}$$

$$\Theta(\eta_0) e^{ik\mu\eta_0} = \int_0^{\eta_0} d\eta\, S e^{ik\mu\eta - \tau} \qquad \int_{-1}^{1} d\mu\, P_\ell(\mu) e^{ik\mu x} = \frac{2 j_\ell(x)}{(-i)^\ell}$$

$$\Theta(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} d\eta\, S e^{ik\mu(\eta - \eta_0) - \tau}$$

$$\Theta(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} d\eta\, S e^{ik\mu(\eta - \eta_0) - \tau}$$

$$= \int_0^{\eta_0} d\eta \left[-\dot{\Phi} - ik\mu\Psi - \dot{\tau}(\Theta_0 + \mu v_b)\right] e^{ik\mu(\eta - \eta_0) - \tau}$$

$$\mu = \frac{-1}{ik}\frac{\partial}{\partial\eta} \qquad e^{-\tau} \qquad g \equiv -\dot{\tau} e^{-\tau}$$

$$\Theta(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} d\eta \left[-e^{-\tau}\dot{\Phi} - \dot{\tau} e^{-\tau}\Theta_0 - \underbrace{\mu}_{\to \frac{-1}{ik}\frac{\partial}{\partial\eta}}(ik\Psi e^{-\tau} + v_b e^{-\tau})\right] e^{ik\mu(\eta - \eta_0)}$$

$$= \int_0^{\eta_0} d\eta \left[-e^{-\tau}\dot{\Phi} - \dot{\tau} e^{-\tau}\Theta_0 + \frac{-1}{ik}\frac{\partial}{\partial\eta}(ik\Psi e^{-\tau}) + \frac{-1}{ik}\frac{\partial}{\partial\eta}(v_b e^{-\tau})\right] e^{(\ )}$$

$$= \int_0^{\eta_0} d\eta \left[-e^{-\tau}\dot{\Phi} - \underbrace{\dot{\tau} e^{-\tau}}_{g}\theta_0 + \dot{\psi} e^{-\tau} + \psi e^{-\tau}(-\dot{\tau}) + \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial \eta}(-i v_b e^{-\tau}) \right] e^{(\,)}$$

$$= \int_0^{\eta_0} d\eta \left[(\theta_0 + \psi) g + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{i v_b g}{k}\right) + e^{-\tau}(\dot{\psi} - \dot{\Phi}) \right] e^{ik\mu(\eta - \eta_0)}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} P_l(\mu)\theta(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} d\eta \bar{S} \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} P_l(\mu) e^{ik\mu(\eta-\eta_0)} = \int_0^{\eta_0} d\eta \bar{S}\, j_l(k(\eta - \eta_0))$$

l의 출현 (르장드르)
l을 이해하면 4강 우주론을
이해할 수 있다.

$$(-i)^l \theta_l(\eta_0) = \frac{1}{(-i)^l}\int_0^{\eta_0} d\eta \bar{S}\, j_l(k(\eta - \eta_0))$$

$$\theta_l(\eta_0) = (-1)^l \int_0^{\eta_0} d\eta \bar{S}\, j_l(k(\eta - \eta_0))$$

$$\theta_l(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} d\eta \bar{S}\, j_l(k(\eta_0 - \eta))$$

$$\theta_l(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} d\eta \left[(\theta_0 + \psi) g + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{i g v_b}{k}\right) + e^{-\tau}(\dot{\psi} - \dot{\Phi}) \right] j_l(k(\eta_0 - \eta))$$

$$\int_0^{\eta} d\eta \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{i g v_b}{k}\right) j_l(k(\eta_0 - \eta)) = \left[\frac{i g v_b}{k} j_l(k(\eta_0 - \eta)) \right]_0^{\eta_0} - \int_0^{\eta} d\eta \left(\frac{i v_b g}{k}\right) \frac{\partial}{\partial \eta} j_l(k(\eta_0 - \eta))$$

$g(\eta_0) = g(0) = 0$

$(ab)' = a'b + ab' \rightarrow \int ab' = [ab] - \int a'b$

$$j_{l-1}(k(\eta_0 - \eta)) - \frac{l+1}{k(\eta_0 - \eta)} j(k(\eta_0 - \eta))$$

$$\theta_l(\eta_0) = [\theta_0(\eta_*) + \psi(\eta_*)] j_l(k(\eta_0 - \eta_*)) - i v_b \left[j_{l-1}(k(\eta_0 - \eta_*)) - \frac{l+1}{k(\eta_0 - \eta_*)} j_l(k(\eta_0 - \eta_*)) \right] + \int_0^{\eta_0} d\eta\, e^{-\tau}(\dot{\psi} - \dot{\Phi})\, j_l(k(\eta_0 - \eta))$$

$v = 3i\theta_1$

$$\theta_l(\eta_0) = [\theta_0(\eta_*) + \psi(\eta_*)] j_l(k(\eta_0 - \eta_*)) + 3\theta_1 \left[j_{l-1}(k(\eta_0 - \eta_*)) - \frac{l+1}{k(\eta_0 - \eta_*)} j_l(k(\eta_0 - \eta_*)) \right] + \int_0^{\eta_0} d\eta\, e^{-\tau}(\dot{\psi} - \dot{\Phi}) \times j_l(k(\eta_0 - \eta))$$

$$L \to \ddot{\phi} \to \phi+\delta\phi \to \ddot{\delta}\phi \to \ddot{h} \to \delta\phi \to \xi \to \psi \to P_\psi \to \delta \to P(k)$$

거미줄에 걸린 새벽 이슬이 우리의 은하계라고 했을 때 거미줄은 다크메타이다.

$$C_\ell(\eta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\eta_0} dk\, k^2\, \mathbf{P(k)} \left|\frac{\theta_\ell(k)}{\delta(k)}\right|^2$$

↳ 다크 메타

$$L = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} - V(\phi)$$

라그랑지안 m v v

ϕ inflation field

$V(\phi)$ potential of ϕ

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0 \quad \text{Euler-Lagrangian eq.}$$

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta)\,\mathrm{diag}[-1,1,1,1] \quad \text{FRW metric}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)} = -g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi \qquad g_{\mu\nu} = \frac{1}{g^{\mu\nu}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) &= -\partial_\mu g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi - g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi \\ &= -\partial_0 g^{00}\partial_0\phi - g^{00}\partial_0\partial_0\phi - \frac{1}{a^2}\nabla^2\phi \\ &= 2\frac{\dot{a}}{a^3}\dot{\phi} + \frac{1}{a^2}\ddot{\phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\phi\end{aligned}$$

$$2\frac{\dot{a}}{a^3}\dot\phi + \frac{1}{a^2}\ddot{\phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\phi + V'(\phi) = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial\phi} = -V'(\phi)$$

$$\ddot{\phi} + 2aH\dot{\phi} - \nabla^2\phi + a^2V'(\phi) = 0$$

$$\phi \to \phi + \delta\phi \qquad V'(\phi+\delta\phi) = V'(\phi) + V''(\phi)\delta\phi$$

$$\ddot{\delta\phi} + 2aH\dot{\delta\phi} - \nabla^2\delta\phi + a^2V''\delta\phi = 0$$

$$h \equiv a\delta\phi \qquad \nabla \to ik \qquad \epsilon \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{H}\right) \qquad \delta \equiv \frac{1}{8\pi G}\frac{V''}{V}$$

$$\ddot{h} + \Big(k^2 + \underbrace{a^2V''}_{\frac{3\delta}{\eta^2}} - \underbrace{\frac{\ddot{a}}{a}}_{\frac{2+3\epsilon}{\eta^2}}\Big)h = 0$$

$$\ddot{h}+\left[k^2+\frac{1}{\eta^2}(3\delta-2-3\epsilon)\right]h=0$$

$$\ddot{h}+\left[k^2+\frac{1}{\eta^2}\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)\right]h=0 \qquad \nu^2=\frac{9}{4}-3\delta+3\epsilon$$

$$h=\sqrt{-\eta}\left[H_\nu^{(1)}(-k\eta)+H_\nu^{(2)}(-k\eta)\right]$$

$$h\simeq\frac{e^{i(\nu-\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2k^3}}aH\left(\frac{k}{aH}\right)^{\frac{3}{2}-\nu}$$

$$\delta\phi=\frac{e^{i(\nu-\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2k^3}}H\left(\frac{k}{aH}\right)^{\frac{3}{2}-\nu}$$

$$|\delta\phi|=\frac{H}{\sqrt{2k^3}}\left(\frac{k}{aH}\right)^{\frac{3}{2}-\nu}$$

$$\xi\equiv-\frac{ik_i\delta T_i^0 H}{k^2(p+\rho)}-\psi \qquad \xi=\frac{aH}{\dot\phi}\delta\phi$$

$$p+\rho=\frac{4}{3}\rho_r \qquad \theta_1=\frac{k\psi}{6aH} \qquad \left(\frac{aH}{\dot\phi}\right)^2=\frac{4\pi G}{\epsilon}$$

$$ik_i\delta T_i^0=4ak\rho_r\theta_1$$

$$\xi=-\frac{4ak\rho_r\left(\frac{k\psi}{6aH}\right)H}{k^2\frac{4}{3}\rho_r}-\psi$$

metric pertubation

$$=-\frac{1}{2}\psi-\psi=-\frac{3}{2}\psi$$

$$\psi=-\frac{2}{3}\xi=-\frac{2}{3}\left(\frac{aH}{\dot\phi}\right)\delta\phi$$

$$P_\psi=\frac{4}{9}\left(\frac{aH}{\dot\phi}\right)^2|\delta\phi|^2$$

$$=\frac{4}{9}\frac{4\pi G}{\epsilon}\frac{H^2}{2k^3}\left(\frac{k}{aH}\right)^{3-2\nu}$$

$$=\frac{8\pi G}{9k^3}\frac{H^2}{\epsilon}\left(\frac{k}{aH}\right)^{n-1}$$

$$\boxed{\begin{aligned}3-2\nu&=2\delta-2\epsilon\\&=n-1\end{aligned}}$$

Harrison - gedovich - foolles spectrum

$$\delta = \frac{3k^2}{5H_0^2\,\Omega_{m0}}\,T(k)\,D(a)\,\Phi_p$$ → premodal pertubation

$$\hookrightarrow \langle \Phi_p \Phi_p^* \rangle = P_\Phi = P_\psi$$

$$P_\psi = P_\Phi = \frac{50\pi^2}{9k^3}\left(\frac{k}{aH}\right)^{n-1}\delta_H^2\,\frac{\Omega_{m0}^2}{D^2(a_0)}$$

$$P(k) = \langle \delta\cdot\delta^* \rangle = \frac{9k^4}{5H_0^4\,\Omega_{m0}^2}\,T^2(k)\,D^2(a)\,\langle \Phi_p \Phi_p^* \rangle$$

$$= \frac{9k^4}{25H_0^4\,\Omega_{m0}^2}\,T^2(k)\,D^2(a)\,\frac{50\pi^2}{9k^3}\left(\frac{k}{aH_0}\right)^{n-1}\delta_H\,\frac{\Omega_{m0}^2}{D^2(a_0)}$$

$$= 2\pi^2\delta_H^2\,\frac{k^n}{H_0^{n+3}}\left(\frac{D(a)}{D(a_0)}\right)^2 T^2(k)$$

$$l(l+1)\,C_l^{LS}(\eta) = \frac{\pi\,\Omega_{m0}^2}{2D^2(a_0)}\,\delta_H^2$$

$$\theta(\vec{x},\vec{n},\eta) \equiv \frac{\delta T}{T}$$

$$\theta(\vec{x},\vec{n},\eta) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\,Y_{lm}(\vec{n})$$

$$\int d\Omega\,\theta\cdot Y_{lm}^*(\vec{n}) = \sum_{l'}\sum_{m'} a_{l'm'}\underbrace{\int d\Omega\,Y_{l'm'}(\vec{n})\,Y_{lm}^*(\vec{n})}_{\hookrightarrow\ \delta_{ll'}\delta_{mm'}} = a_{lm}$$

↗ 구면 조화함수

$$a_{lm} = \int d\Omega\,\theta(\vec{x},\vec{n},\eta)\,Y_{lm}^*(\vec{n})$$

$$a_{lm} = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\int d\Omega\,\theta\,Y_{lm}^*$$

$a = x + iy \qquad aa^* = x^2 + y^2$

$a^* = x - iy \qquad = 실수$

$$C_l = \langle a_{lm}\cdot a_{lm}^* \rangle = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,e^{+ik\cdot x}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\,e^{-ik'\cdot x}$$

실수로 정의되어야 실제 우주를 만들수 있다.

$$\boxed{a_{lm}^* = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,e^{-i\cdot k\cdot x}\int d\Omega\,\theta^*\,Y_{lm}}$$

$$C_\ell = \langle a_{\ell m} \cdot a^*_{\ell m} \rangle$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{+ik\cdot x} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{-ik'\cdot x} \underbrace{\langle \Theta(k,n)\,\Theta^*(k',n')\rangle}_{\hookrightarrow \langle \delta\cdot\delta^* \rangle \frac{\Theta(k)\,\Theta^*(k')}{\delta\cdot\delta^*}} \int d\Omega\, Y^*_{\ell m} \int d\Omega\, Y_{\ell m}$$

$$(2\pi)^3 \delta(k-k')\, P(k)$$

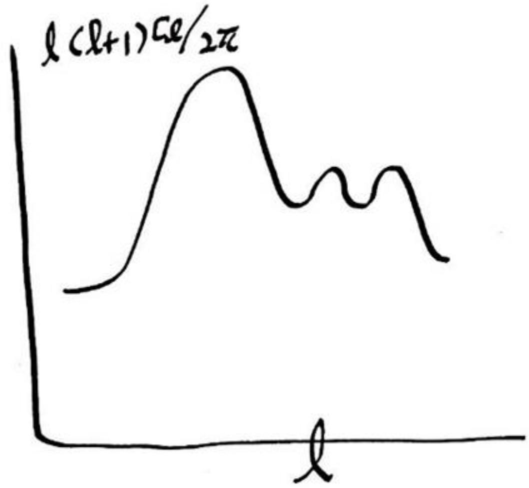
$$C_\ell = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{P(k)}{|\delta(k)|^2} \sum_{\ell'} \sum_{\ell''} (-i)^{\ell'} (i)^{\ell''} \underbrace{(2\ell+1)(2\ell''+1)}_{\Theta_\ell\, \Theta^*_\ell}\, \delta_{\ell\ell'}\, \delta_{\ell\ell''}$$

$$\times \underbrace{\int d\Omega\, P_{\ell'}(\vec{k}\cdot\vec{n})\, Y_{\ell m}}_{\hookrightarrow \left(\frac{4\pi}{2\ell+1}\right) Y_{\ell m}} \underbrace{\int d\Omega\, P_{\ell''}\, Y^*_{\ell m}}_{\hookrightarrow \left(\frac{4\pi}{2\ell+1}\right) Y^*_{\ell m}}$$

$$d^3k = dk\, k^2\, d\Omega$$

$$C_\ell = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left| \frac{\Theta_\ell(k)}{\delta(k)} \right|^2 (4\pi)^2 P(k)\, Y_{\ell m} Y^*_{\ell m} = \frac{2}{\pi} \int dk\, k^2 \left| \frac{\Theta_\ell(k)}{\delta(k)} \right|^2 P(k) \underbrace{\int d\Omega\, Y_{\ell m} Y^*_{\ell m}}_{\hookrightarrow 1}$$

$$C_\ell = \frac{2}{\pi} \int dk\, k^2\, P(k) \left| \frac{\Theta_\ell(k)}{\delta(k)} \right|^2$$



"L의 출현"