박문호의 자연과학 세상

137억년 우주의 진화
3회 3강

#6. Lagrangian & Hamiltonian
#7. Dirac equation

※ 박문호 박사님의 강연을
나름대로 정리한 것이므로
오류가 있을 수 있으며
이 강연의 저작권은
강연자에게 있으니
재배포를 삼가 바랍니다.

강연일 : 2011. 4. 3. (일)
배포일 : 2011. 8. 20. (토)
작성자 : 푸른버들(김양겸)

#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$L = T - V$$

Give me “L”(L : Lagrangian)
I will move the earth !

T : 운동 에너지 (Kinetic energy)
V : 포텐셜 에너지 (Potential energy), 위치 에너지

느낌으로 받아들일 것,
마치 20층 높이에 있는 것 같은 불안함

중요성을 알고 있다면, 언젠가는 그 길을 찾아간다.

#6. Lagrangian & Hamiltonian

우주의 모든 존재는 움직인다.
4차원 시공에서 광속으로 움직인다.

존재가 움직이는 길을 수식으로 푼 것이 운동방정식

찰흙같이 덩어리 지으면
질량이라는 하나의 속성으로 볼 수 있다.

질량을 가진 물체가 우주에서 시간에 따른 변화를 가질 때
가는 길이 정해져 있다.

* 페르마의 원리 (Fermat's principle, from wikipedia)
빛은 최단 시간으로 이동할 수 있는 경로를 택한다.

#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$L(q,\dot{q},t)$$

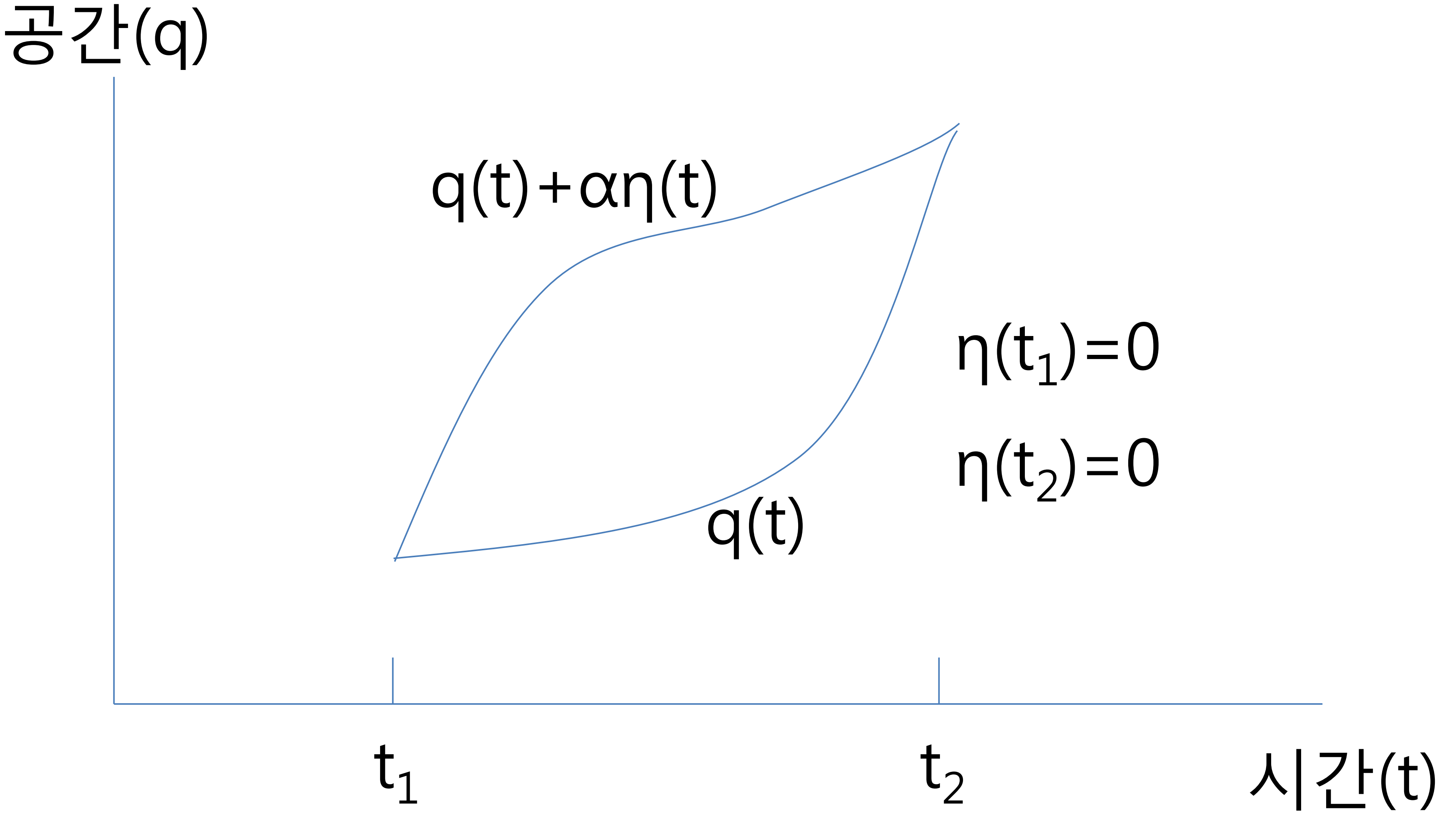
Lagrangian이 가지는 세 가지 매개변수(parameter)
q : 3차원 공간좌표
q' : q의 시간에 대한 미분
t : 시간

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt}$$

변화율이 최소인 경로를 찾는다.

미분
- 미분(고등학교 수준)
- 편(偏)미분 → 전(全)미분 → 열역학(L, H)
- 공변미분 → 상대성이론

#6. Lagrangian & Hamiltonian



#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$q(\alpha,t) = q(0,t) + \alpha\eta(t)$$

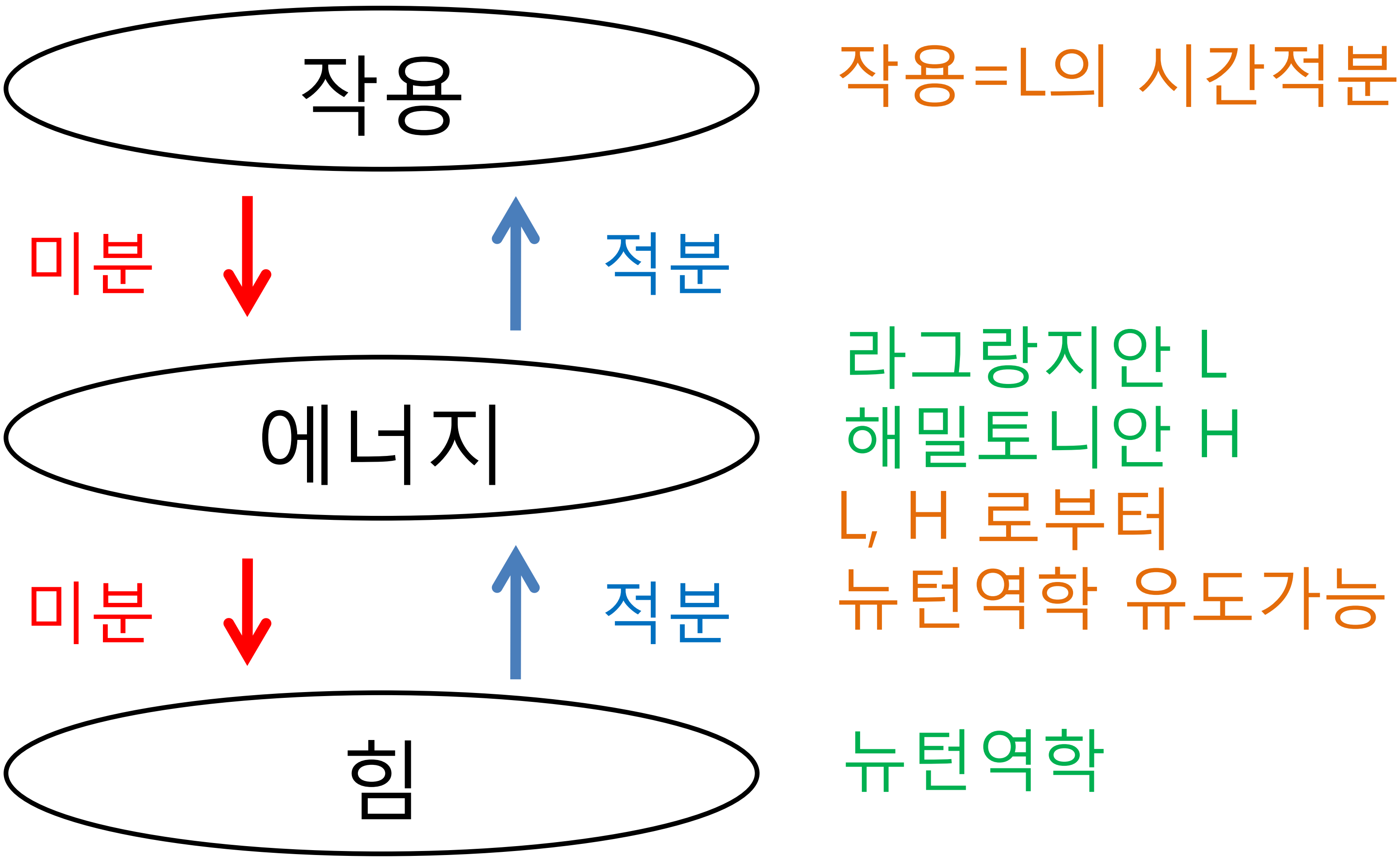
q는 범함수(汎函數, from 네이버 사전)
: 정의역의 원소가 함수들로 이루어진 함수

$$S = \int L(q,\dot{q},t)dt$$ S : 작용(action)

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int \frac{\partial L}{\partial \alpha} dt$$

$$= \int \frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha}$$

힘, 에너지, 작용의 계층구조



#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$V(x,y,z,t) \Longrightarrow V(x,y,z)$$

보존력장(conservative field)
: 시간에 대해서 고정되어 있는 포텐셜

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int \left(\frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} \right) dt$$

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[q(0,t) + \alpha \eta(t) \right] = \eta(t)$$

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\dot{q}(0,t) + \alpha \dot{\eta}(t) \right] = \dot{\eta}(t) = \frac{d\eta}{dt}$$

#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\eta \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d\eta}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt = 0$$

미분 값이 0인 지점 = 극대 또는 극소

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\eta}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \left[\eta \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$$

#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \eta \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt = 0$$

η이 항상 **0**이 아닐 수 있으므로

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

라그랑지안
운동방정식

#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \equiv P = mv$$ 운동량(momentum)

라그랑지안의 공간변화가 0일 경우,
운동량이 보존된다. (운동량 = 운동상수)

공간에 대한 대칭 → 운동량

#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$ 의 경우

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial t}$$

$$= \dot{q}\frac{\partial L}{\partial q} + \ddot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \qquad \longleftarrow \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

$$= \dot{q}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \ddot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

#6. Lagrangian & Hamiltonian

미분의 성질 이용

$$(xy)' = x'y + xy'$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \dot{q}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \ddot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L\right) = 0$$

#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L\right) = 0$$

$$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \equiv H$$ 해밀토니안(Hamiltonian)

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

해밀토니안의 시간변화가 0일 경우,
에너지가 보존된다. (에너지 = 에너지상수)

시간에 대한 대칭 → 에너지

#6. Lagrangian & Hamiltonian

자연에서 운동이 일어나는 길?
작용이 최소가 되는 길

최소작용의 원리를 따르는
라그랑지안 운동방정식

라그랑지안의 공간변화가 0일 때,
공간에 대해 대칭, 운동량 보존

라그랑지안의 시간변화가 0일 때,
해밀토니안의 시간변화도 0이고
시간에 대해 대칭, 에너지 보존

#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$\begin{aligned} H &= \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \\ &= vp - L \\ &= v(mv) - L \\ &= mv^2 - L \qquad\qquad \leftarrow T = \frac{1}{2}mv^2 \\ &= 2T - (T - V) \\ &= T + V \end{aligned}$$

해밀토니안(Hamiltonian)은
전체 에너지(Total energy)

#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$L(q, \dot{q}, t)$$

$$H(q, P, t)$$

전미분 : 각 변수에 대한 변화량을 더해준 것

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial P} dP + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$dH = d(\dot{q}P - L) = \dot{q}dP + Pd\dot{q} - dL$$

#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \qquad \leftarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = P$$

$$= \frac{d}{dt}P = \dot{P}$$

$$dL = \dot{P}dq + Pd\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$
\begin{aligned}
dH &= \dot{q}dP + Pd\dot{q} - dL \\
&= \dot{q}dP + Pd\dot{q} - \left(\dot{P}dq + Pd\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}dt\right) \\
&= \dot{q}dP - \dot{P}dq - \frac{\partial L}{\partial t}dt
\end{aligned}
$$

윗 식과 아랫 식을 비교

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial P}dP + \frac{\partial H}{\partial t}dt$$

#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial P}$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

해밀토니안 방정식
(Hamiltonian equation)

진짜 실력은
위대한 수식을 보고
위대함을 느끼는 것

우리나라 과학교육에 부족한 것
자연의 아름다움, 뜨거운 가슴 …

열역학
고전역학
양자역학

뉴턴 역학
라그랑지 동역학
해밀턴 동역학

라그랑지안
해밀토니안
포아송 괄호

초겨울 햇살 아래로
먼지 알갱이 분분하고
낙엽 떨어지고
태양은 장천을 운행한다.

모두
열심히
움직이는 구나

역학의 길을.

#6. Lagrangian & Hamiltonian

$f(q, P, t)$ q, P, t를 변수로 갖는 함수 f

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial f}{\partial P}\frac{dP}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial P}\dot{P} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial P}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial P} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$\left[\hat{x}, \hat{P}\right] = i\hbar$$ [ ]는 교환자(Commutator)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial P} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= [H, f] + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\uparrow \frac{\partial H}{\partial P}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial P} = [H, f]$$

#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$\frac{df}{dt} = [H, f] + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$[H, q] = \frac{\partial H}{\partial P}\frac{\partial q}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial P} = \frac{\partial H}{\partial P} = \dot{q}$$

$$[H, P] = \frac{\partial H}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial P} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \dot{P}$$

이것으로 고전역학의 마침표를 찍다.

#6. Lagrangian & Hamiltonian

프와송(poisson) 괄호의 양자화

$$[poisson] \leftrightarrow \frac{1}{i\hbar}[commutator]$$

고전역학 ↔ 양자역학

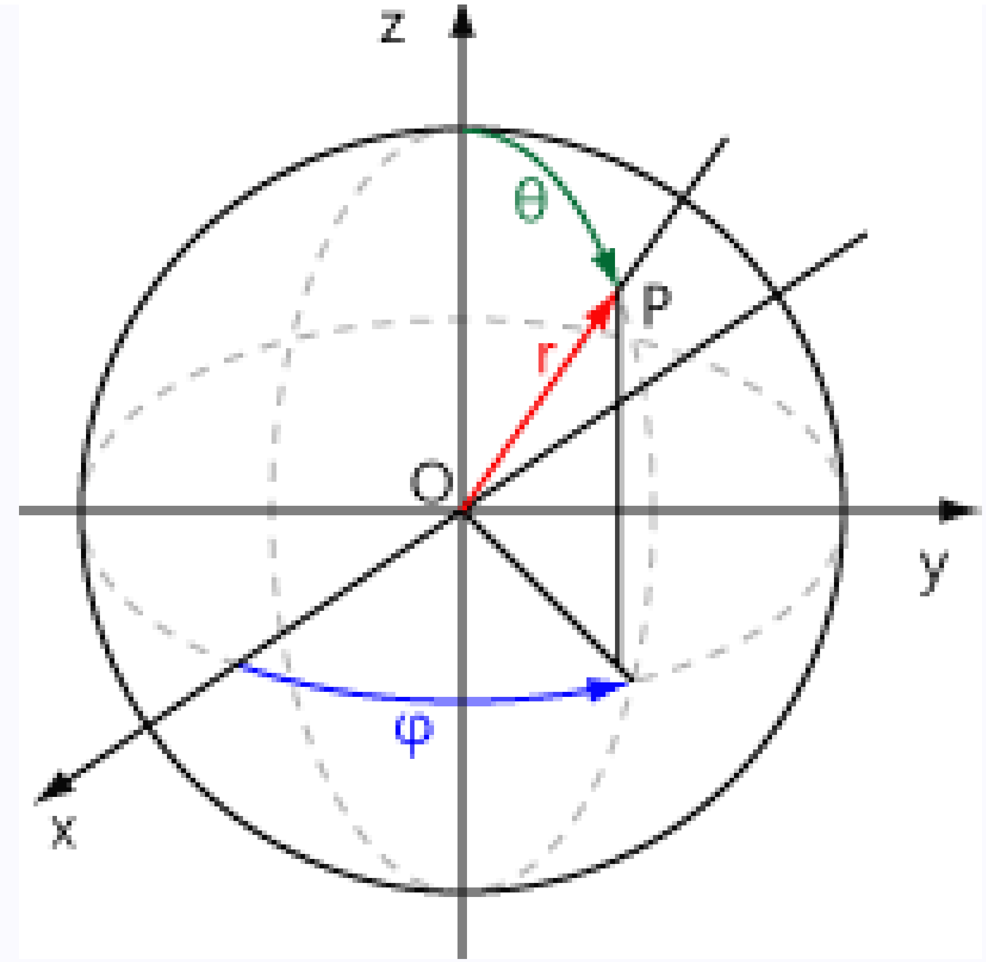
물리학은 단순한 사람이 할 수 있는 것

맞고 틀리고 따지지 말고
자기정합성에 의해서
참으로 그럴 수밖에 없다는 것을 아는 순간
물리학의 길에 들어선다.

#6. Lagrangian & Hamiltonian

물리학이 어렵다고 느끼는 것은
좌표계를 바꾸면서 헷갈리기 때문
그것은 수학일 뿐
물리적 실체가 바뀌는 것은 아니다.

#6. Lagrangian & Hamiltonian



picture from wikipedia

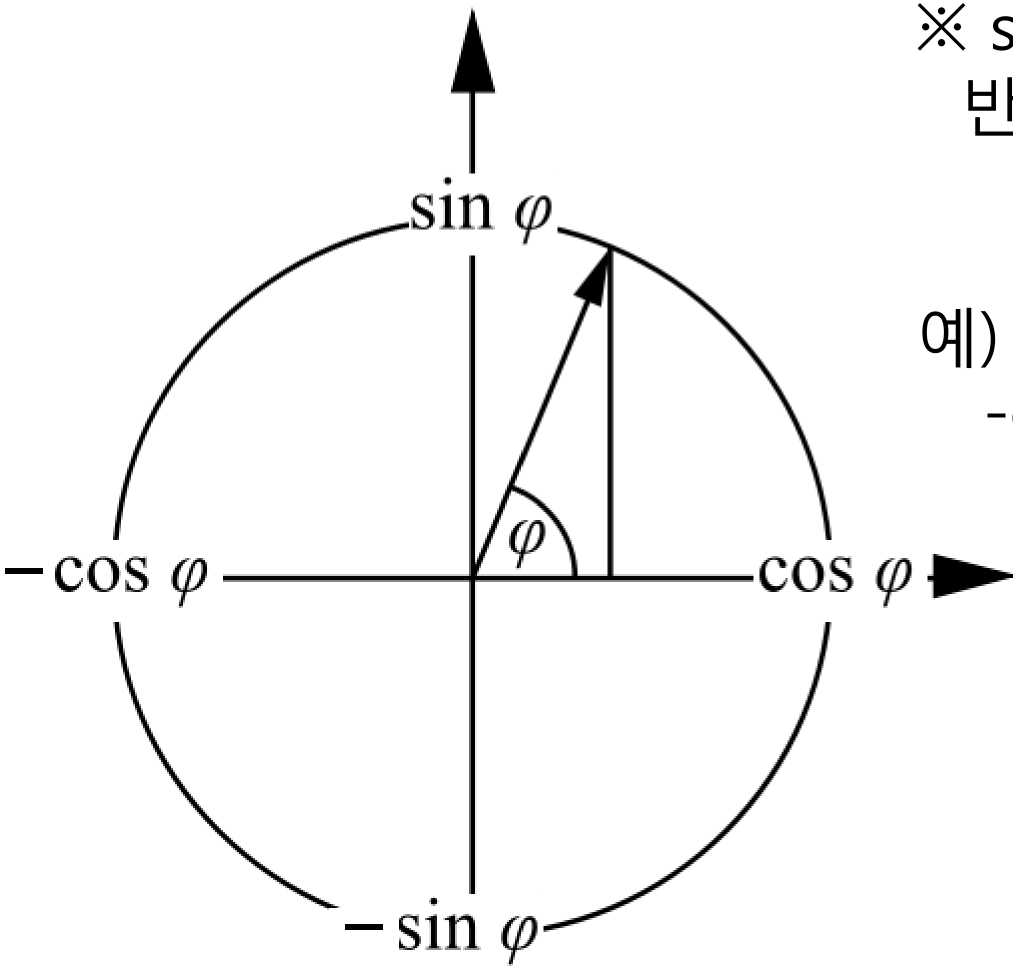
직각좌표계(x, y, z)

↓

구좌표계(r, θ, φ)

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

#6. Lagrangian & Hamiltonian



※ sin, cos 미적분
반시계방향 : 적분
시계방향 : 미분

예) sin 미분 → cos
-cos 적분 → -sin

edited by transfer, from wikipedia

#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$\dot{x} = \dot{r}\sin\theta\cos\phi + r(\dot{\theta}\cos\theta)\cos\phi - r\sin\theta(\dot{\phi}\sin\phi)$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta\sin\phi + r(\dot{\theta}\cos\theta)\cos\phi + r\sin\theta(\dot{\phi}\cos\phi)$$

$$\dot{z} = r\cos\theta - r(\dot{\theta}\sin\theta)$$

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \\ &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - V(r,\theta,\phi) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) - V(r,\theta,\phi) \end{aligned}$$

강의시간에 다뤄지는 수식은
피해갈 수 없는 것

이 수식을 혼자 할 수 있다면
양자역학 책을 볼 수 있다.

버티자 !

#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m(\dot{r}^2 \hat{r} + r^2 \dot{\theta}^2 \hat{\theta} + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2 \hat{\phi})$$

$$\begin{aligned} \dot{q}P &= (\dot{r}\hat{r} + \dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\phi}\hat{\phi}) \cdot m(\dot{r}^2 \hat{r} + r^2 \dot{\theta}^2 \hat{\theta} + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2 \hat{\phi}) \\ &= m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \dot{q}P - L \\ &= m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2) - L \\ &= \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2) + V(r, \theta, \phi) \end{aligned}$$

#6. Lagrangian & Hamiltonian

$$H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + \frac{P_\phi^2}{2mr^2 \sin^2\theta} + V(r,\theta,\phi)$$

운동하는 어떤 질점의 해밀토니안을
구좌표계(r, θ, φ)로 풀어봄

위의 미분 방정식을 풀면
주기율표가 쏟아져 나옴

하나도 모른지만 괜찮다.
모르는 것에 신경쓰지 말자.
대신에 무엇이 중요한지 느낌만 가지고 가자.
그러면 끝까지 공부할 수 있다.

'그게 뭔데?' 하고 물으면
'그건 뭐다!' 라고 말할 수 있어야 한다.

'엇, 뜨거라~ '
'아, 잘 모르겠어. 하지만 무지하게 중요해!'
이렇게 말할 수 있다면 그 사람은 아는 사람

디락방정식을 제대로 아는 사람..

우리나라에서 물리학자가 많은 연구소
표준연구원의 본부장 한 분이
2008년 온지당 모임 후 올린 감상문

대학원에서 디락방정식을 풀면서 전율하던
물리학자는 어디 갔단 말인가?

디락방정식에 가슴 떨려하는 사람이
바로 물리학자

우리 사회에서
느낌이 사라진 학문
과학문화운동을 하는 이유

어느 물리학자의 반성 (온지당 모임 참석 후기) 2008-09-08 10:51

박승남 (earlybird) | 조회: 945 댓글: 7 http://www.100books.kr/?no=8229 주소복사

입출국 신고서에 직업을 회사원으로 썼던 때가 있었다. 지금은 돌아가신 분이지만 물리학 석사학위만 가지고도 연구 잘하던 호주 동료가 직업을 physicist로 적는 것을 보고 약간의 반성과 함께 나도 직업을 물리학자로 적기 시작했었다.

그러나 이제는 다시 회사원으로 적어야 할까 보다. 내가 근무하는 연구원은 국내에서는 가장 많은 물리학자들 일하고 있는 곳이다. 그러나 나를 비롯하여 대부분의 물리학자들이 CERN에서 계획되고 있는 양성자 충돌 실험에 별 관심이 없다. 더 이상 물리학자가 아닌 기술자로 전락해 버린 우리의 모습을 대조적으로 보여준 모임에 다녀왔다는 느낌이다.

임재춘 교수님으로 부터 클럽에 대한 소개를 듣고, 한번쯤 가 볼 생각을 했었다. 더욱이 잘 알고 지내던 황교수님이 오신다니 더 좋은 기회다. 어떤 프로그램이 어떻게 진행되는지 몰랐지만, 아내와 초등1년 딸 애를 앞세울 용기를 냈다. 뇌과학에 대해서는 관심을 가져보려던 참이라 못 알아먹은 얘기가 오히려 내게는 더 큰 가르침이다. 그러나, 결코 쉽지 않는 자연과학에 대한 강의를 들으면서 꼼짝하지 않았던 대중들이 내게는 더 무서운 가르침을 준 것 같다. 초등학교 때 가봤던 또 다른 교회 부흥회였다면 너무 심한 표현일까? 젊은 과학도 두 분의 발표에서 독서를 많이 한 사람들의 깊이를 느낄 수 있었다.

난 앞으로 직업란에 뭐라고 써야 할까? 우주론에 대해서는 입자물리하는 사람들이 몫이라고 치부해 버릴 것인가? 대학원에서 상대론적 양자역학을 들으면서 대칭성으로 부터 출발해서 Dirac 방정식이 유도되는 과정을 보고 전율했던 그 물리학자는 어디로 갔는가? 내 전공이 아닌 분야는 일반인들 보다 더 무식한 기술자로 전락해 버린 자신이 부끄럽다.

최소한 이런 반성의 기회를 준 100books 클럽에 깊은 감사를 드린다. 내 아내처럼 내용을 너무 어려워하는 사람들도 아우를 수 있는 방법도 고민하신다면 더 좋은 모임이 될 것이라 확신한다.

스핀(spin)은 입자가 가지는 고유한 속성
전자는 질량, 전하, 스핀을 가지는 무엇

‘물질이 있다’가 아니고
‘질량 60g이 있다’가 본질

스핀은 우리의 인식작용으로는 상상할 수 없다.
팽이치기와 같은 비유를 들지만
그것 자체는 아니다.

스핀은 양자화된 공간과 관련되어 있다.

디락방정식으로
특수상대성이론과 양자역학을 연결

Antiparticles

Paul A. M. Dirac theory of relativistic quantum mechanics in 1927

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi = 0$$

correctly describes spin 1/2 particle but with a "double" of negative energy...

Oppenheimer, Stuckelberg, Feynman suggest to replace E<0 particles with other (anti)particles of opposite charge and E>0

Ψ describes spin 1/2 particle & antiparticle

#7. Dirac equation

$$H = T + V \qquad \overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

$$P \Rightarrow -i\hbar\overrightarrow{\nabla} \qquad \overrightarrow{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{y} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\hat{z}$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{P^2}{2m} = \frac{(-i\hbar\overrightarrow{\nabla})^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\overrightarrow{\nabla}^2$$

#7. Dirac equation

$H\Psi = E\Psi$ 슈뢰딩거 방정식

Ψ는 상태함수

$$E \Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\overrightarrow{\nabla}^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi$$

슈뢰딩거 방정식은 비상대론적 파동방정식

The Schroedinger Equation

$$i\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V(x)\phi,$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Heart of Quantum Mechanics

Erwin Schroedinger
1887–1961

#7. Dirac equation

#1. 입자를 발견하는 공식으로 부터

$$E = \sqrt{(pc)^2 + m^2c^4}$$

상대론적 파동방정식을 시도
→ 클라인-고든 방정식

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t^2})^2\Psi = ((-i\hbar\nabla)^2c^2 + m^2c^4)\Psi$$

특수상대성 이론으로부터 공식을 만들어 바람직 하지만,
확률밀도가 음의 값을 가지므로 물리적으로 의미 없음

#7. Dirac equation

물리적으로 의미가 있고 특수상대성 이론과 부합하는 파동방정식을 유도 → 디락 방정식

어떤 ideal한 조건을 상정

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=c\vec{\alpha}\cdot\vec{P}\Psi+\beta mc^2\Psi$$

이러한 관계를 만족하는 **α**와 **β**를 찾으면 된다.
α와 **β**는 하나의 상수가 아니라, **4x4** 행렬

#7. Dirac equation

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=c\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{P}\Psi+\beta mc^2\Psi$$

$$=c\overrightarrow{\alpha}\cdot(-i\hbar\nabla)\Psi+\beta mc^2\Psi \quad \leftarrow \nabla=\frac{\partial}{\partial x}$$

$$i\hbar\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}+c\overrightarrow{\alpha}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)-\beta mc^2\Psi=0$$

양변을 c로 나누고, β를 곱한다.

$$i\hbar\left(\frac{\beta}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\beta\overrightarrow{\alpha}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)-\beta^2 mc\Psi=0$$

#7. Dirac equation

속도 x 시간 = 거리

$$ct = x^0 \rightarrow c\partial t = \partial x^0$$

공간에 대한 벡터이므로 i 표기 가능 (여기서, i = 1, 2, 3)

$$i\hbar\left(\beta\frac{\partial\Psi}{\partial x^0} + \beta\vec{\alpha}^i\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right) - \beta^2 mc\Psi = 0$$

β^2 = 1 이어야 한다 !

#7. Dirac equation

표기를 간단히 하기 위해 다음과 같이 씀

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

#7. Dirac equation

클리퍼드 대수에 의해

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \beta$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = 1$$

$$\beta\overrightarrow{\alpha} = \gamma^i = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$$

α는 파울리 행렬**(Pauli's matrix)**

#7. Dirac equation

$$i\hbar\left(\beta\frac{\partial\Psi}{\partial x^0}+\beta\overrightarrow{\alpha}^i\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right)-\beta^2 mc\Psi=0$$

$$\beta,\ \beta\overrightarrow{\alpha}\ \Longrightarrow\ \gamma^{\mu\,=\,0,1,2,3}$$

분리 되어있던 시간(0)과 공간(1,2,3)을
클리퍼드 대수로서 하나로 표기 가능

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-mc\right)\Psi=0$$

디락 방정식 완성 !

#7. Dirac equation

멋있는 표현으로 다시 써보면,

$$(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc)\Psi = 0$$

여기서,

$$i\hbar\partial_{\mu} \Rightarrow P_{\mu}$$

로서 4차원 시공간의 운동량을 구할 수 있다.
그 중에서 시간 성분이 에너지
곧, 에너지는 4차원 운동량의 시간성분 !

위 식을 다시 쓸 수 있다.

$$(\gamma^{\mu}P_{\mu} - mc)\Psi = 0$$

#7. Dirac equation

시간 성분과 공간 성분을 분리

$$\gamma^{\mu} P_{\mu} = \gamma^{0} P_{0} - \gamma^{i} P_{i} \qquad \leftarrow P_{0} = \frac{E}{c}$$

시간 성분에 대해서 다음이 성립

$$\gamma^{0} P_{0} = \gamma^{0} P^{0}$$

$$\gamma^{0} P^{0} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \frac{E}{c} = \begin{pmatrix} E/c & 0 \\ 0 & -E/c \end{pmatrix}$$

공간 성분에 대해서 위아래 바뀔 때 부호 반전

#7. Dirac equation

$$E = \sqrt{(pc)^2 + m^2c^4}$$

4차원 운동량에 대해..
광자는 질량 m = 0 이므로

$$E = Pc$$

$$P = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

$$= \frac{h/2\pi}{\lambda/2\pi} = \hbar\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = \hbar k$$

#7. Dirac equation

$$\gamma^i P^i = \beta \overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{P}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \overrightarrow{\sigma} \\ \overrightarrow{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{P}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{P} \\ \overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{P} & 0 \end{pmatrix}$$

#7. Dirac equation

$$(\gamma^{\mu} P_{\mu} - mc)\Psi = 0$$

$$\gamma^{\mu} P_{\mu} = \gamma^{0} P_{0} - \gamma^{i} P_{i}$$

$$\left[\begin{pmatrix} E/c & 0 \\ 0 & -E/c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma}\cdot\vec{P} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{P} & 0 \end{pmatrix} - mc\right]\Psi = 0$$

$$mc = \begin{pmatrix} mc & 0 \\ 0 & mc \end{pmatrix} \qquad \Psi = \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix}$$

#7. Dirac equation

$$\begin{pmatrix} \frac{E-mc^2}{c} & -\vec{\sigma}\cdot\vec{P} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{P} & -\frac{E+mc^2}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{E-mc^2}{c} u_a - \vec{\sigma}\cdot\vec{P} u_b = 0$$

$$u_a = \frac{c}{E-mc^2} \vec{\sigma}\cdot\vec{P} u_b$$

#7. Dirac equation

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\sigma}\cdot\overrightarrow{P} &= (\sigma_x\hat{x}+\sigma_y\hat{y}+\sigma_z\hat{z})\cdot(P_x\hat{x}+P_y\hat{y}+P_z\hat{z}) \\
&= \sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P_x + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} P_y + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P_z \\
&= \begin{pmatrix} P_z & P_x - iP_y \\ P_x + iP_y & -P_z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

#7. Dirac equation

$$u_a = \frac{c}{E - mc^2}\vec{\sigma}\cdot\vec{P}u_b$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{cP_z}{E - mc^2} & \dfrac{c(P_x - iP_y)}{E - mc^2} \\ \dfrac{c(P_x + iP_y)}{E - mc^2} & \dfrac{-cP_z}{E - mc^2} \end{pmatrix} u_b$$

#7. Dirac equation

$$u_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

라 하자. (spin up 을 가정)

$$u_a = \begin{pmatrix} \dfrac{cP_z}{E - mc^2} \\ \dfrac{c(P_x + iP_y)}{E - mc^2} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ spin up

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ spin down

#7. Dirac equation

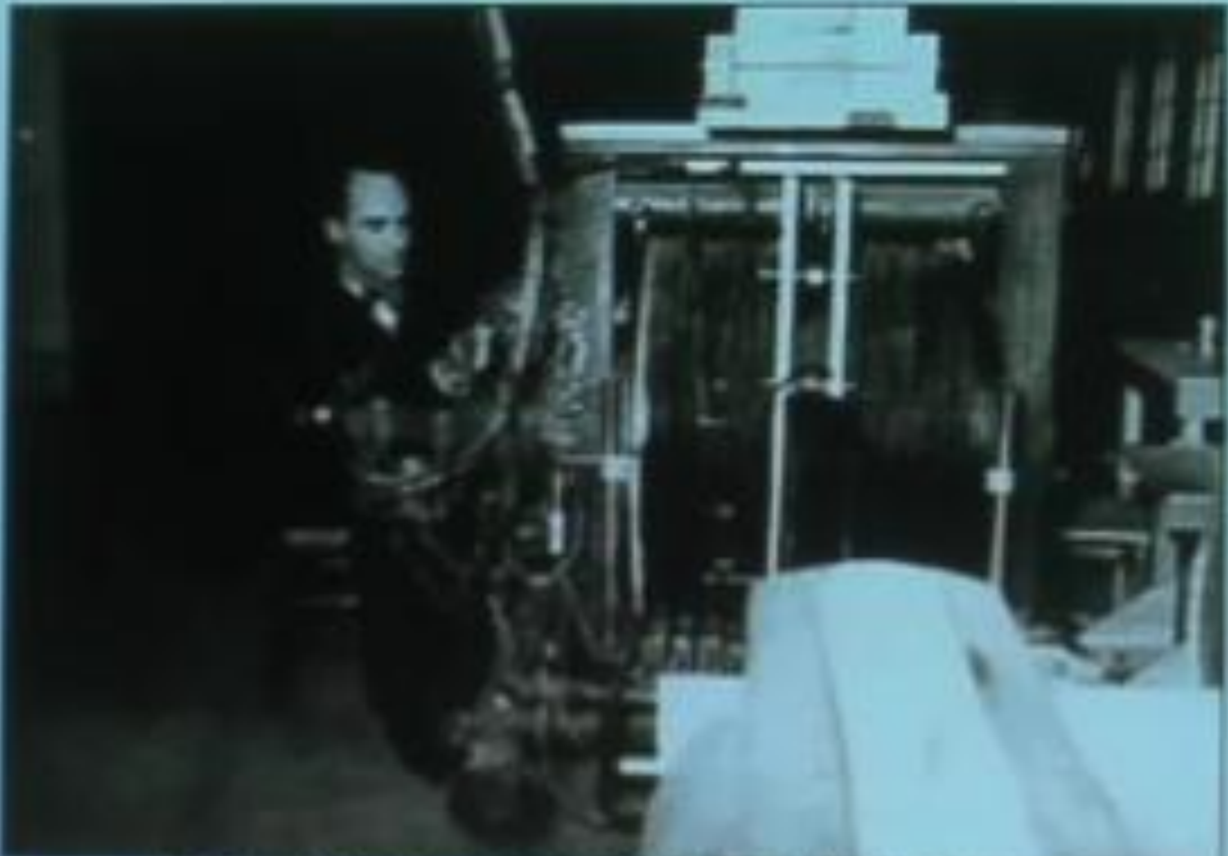
$$E = |mc^2| = \pm\, mc^2$$

$E=mc^2$일 경우,
분모의 값이 0이 되어버리므로
물리적으로 무의미

그러므로, $E=-mc^2$ 이어야만 한다.
음의 에너지를 가질 수 있는가가 딜레마

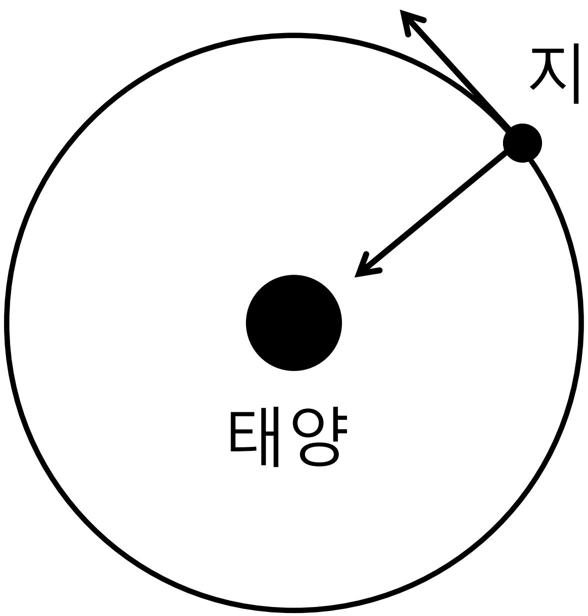
이후 칼 앤더슨의 실험을 통해 양전자를 발견으로
디랙의 예견은 사실로 판명

Positrons were observed at CAL-Tech by C.D. Anderson in 1932.



Pair creation

#7. Dirac equation



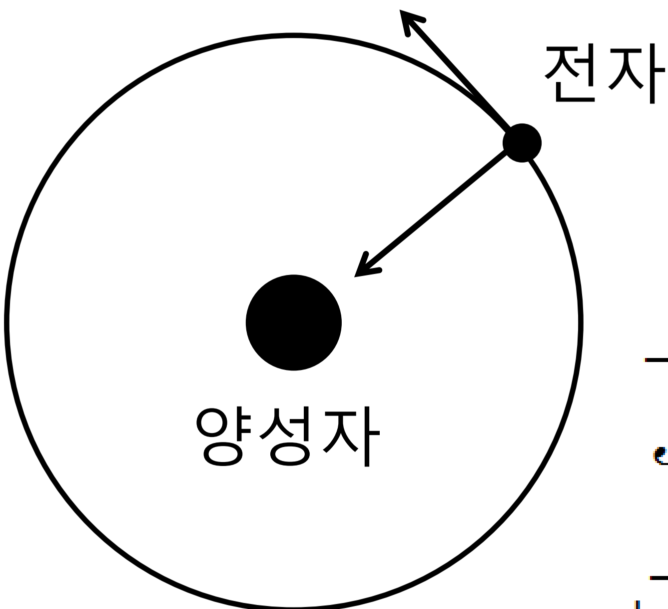
고전역학

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$ 전체 각운동량

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$ 공전

$$\vec{S} = I\omega$$ 자전

#7. Dirac equation



양자역학

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$ 전체 각운동량

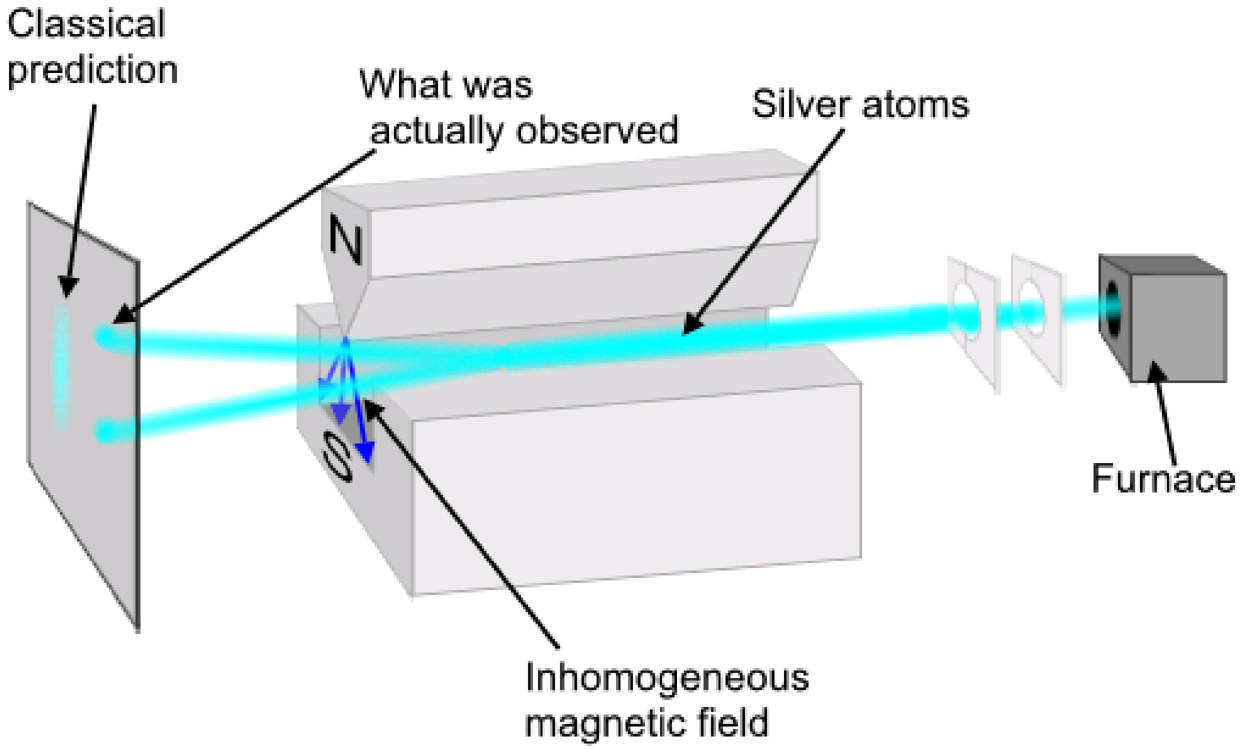
$$|\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar \qquad L_z = m_l \hbar$$

$$|\vec{S}| = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar \qquad S_z = m_s \hbar$$

주기율표의 완성은 디락방정식으로부터 이루어짐

#7. Dirac equation

[슈테른-게를라흐 실험] from wikipedia



전자가 보는 공간은 불연속적이다 !
전자가 갈 수 있는 공간의 방향은 두 갈래길

#7. Dirac equation

우리의 감각을 연장하여
자연을 보려 하지 마라.

우리의 체감각을 통해서 본 세계를
넘어가야 물리의 세계가 펼쳐진다.

우리의 감각만으로 판단하는 것은
고전 물리학
틀릴 수 밖에 없다.

#7. Dirac equation

전자가 가질 수 있는 자전방향

$$2s + 1 = 2$$

따라서 전자의 스핀 s = ½

※ 디락방정식의 의의

1. 전자가 가질 수 있는 자전방향은 두 가지뿐

2. 음의 에너지를 가지는 반물질 예견