

제9회 13기 우주9회 질타  
2017. 7. 23

# 제 11강. 열역학에서 우주론까지

[ 2015 Higgs  
2016 CMB (25hr) : 우주론 핵심의 80% ]

2017. 물리학을 어떻게 이해할 것인가?

## [ 자연과학 5대 공식 ]

•  $F = ma$

4차원 version  
$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$$
  
Newton

$H\psi = E\psi$

wave  
•  $E = h\nu$   
파장  $\lambda$  → 주파수  $\nu$

Einstein

•  $\lambda = \frac{h}{p}$   
각운동량  $p$  → 양자화

드브로이

$$\frac{h}{h} = \frac{h}{2\pi}$$

( $\therefore$  모든 것은 원운동이다)

•  $L = n\hbar$

•  $dU = Tds - pdV + \mu dN$

$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$

"자연과학은  
끝이 있다"

- 5대 공식으로 귀결된다

•  $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$

• 모든 물리학의 시작은 " $F=ma$ "  
; 고전역학



양자역학

• photon.  $\rightarrow$  wave  
                     $\rightarrow$  입자

$E = h\nu$   
 $\lambda = \frac{h}{p}$   
양자의 세계로  
진입

• 각운동량이 양자화되어 있음  $L = n\hbar$

• 열역학은 고전역학, 양자역학과 약간  
다른 분야

; state (상태)

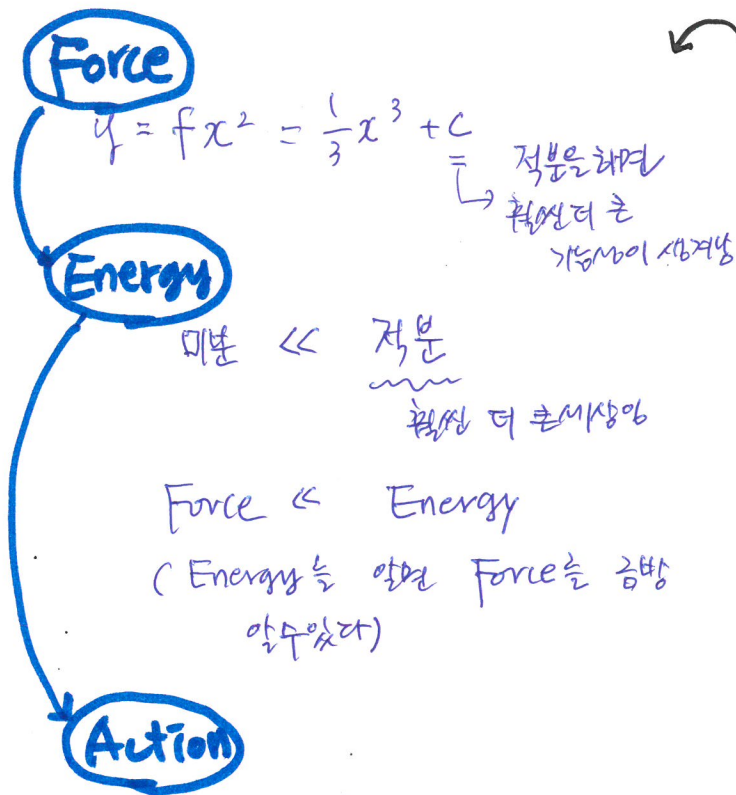
계산까지 형상을 설명하는 학문  
가장 위대한 학문  
by Einstein  
"확률"과 연결됨

$\Rightarrow$  자연과학은 '확률', '통계'를  
기반으로 함

(eg) 외자 100, 사람 10  
 $\rightarrow$  외자에 사람이 앉은 모든 가능성,  
경우의 수가 count 된다.

(eg) Big Data. 인공지능(AI)의 핵심으로  
이 모든 '확률'의 가능성을 계산할 수  
있음

"AI" ~ 열역학의 세계이다

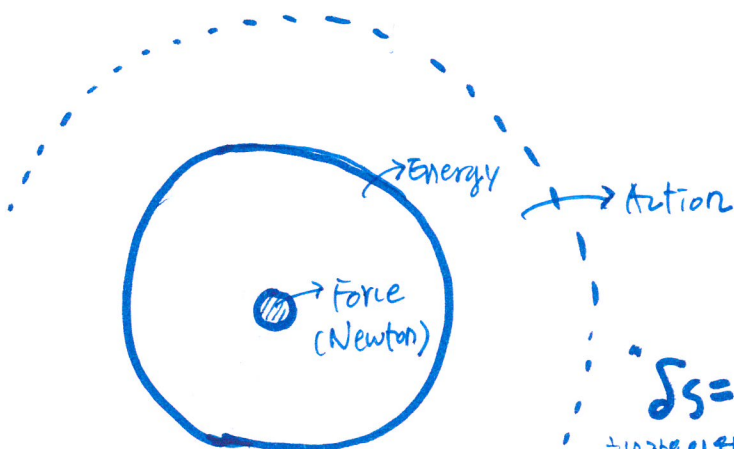


미분      미분  
Force → Energy → Action

(∴) Action 부터 공부하면  
Energy, force를 알 수 있다.

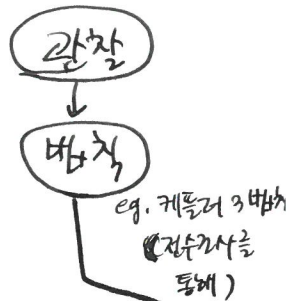
Action =  $h$  planck상수

Action = Energy × 시간  
 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{sec}$



$\delta S = 0$   
최소작용의 원리  
= 자연의 법칙

· 수 많은 '관찰' data  
→ 끼워 맞추는 '법칙'  
경험의 수에 대한 이론  
헤아림  
연역학 (에르되시)  
→ 체계적으로 엄밀한 과학분야이다.  
계수의 count 하는 방법  
수들  
(∴) 가장 큰 전수 조사 하겠다



(계수조사  
이력수조각)  
일반화시킬 수 있는  
법칙 (원칙)  
만들기

(∴)  $F = ma$

Newton 부터 자연 과학이  
시작됨

(eg) 케플러의 법칙  
→ 전수조사를 통해 증명되는  
'법칙'을 만들어 냄  
but '왜' 그런지는 몰랐다.  
(계수)

↓

Newton

· Force를 유도할 수 있을 것.  
Energy에 '주목' 했다. (산악회영 이후)  
「역」을 정립하기 시작함.

⇒ '연역학' 제도

Energy를 다루는 것.

Energy  $\xrightleftharpoons[\text{적분}]{\text{미분}}$  Force



- 모든 입자들은 potential energy가 '낮은' 곳에 위치할 확률이 더 높다.  
( $\leadsto$  더 안정적임 상태)

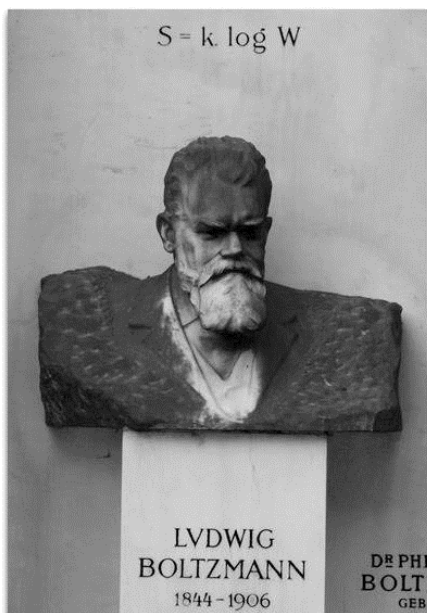
energy minimum의 미생  
 $\rightarrow$  미생들이 저하기 쉬운 상태  
 미생한 사람들이 저하기 쉬운 이유?  
 Energy가 많이 들면  
 $\therefore$  이런 가능성의 사람이 저하기 때문

$$\text{상태의 수} \propto \text{확률}$$

(가장어려운 상태)  
 저온에서도 0 K entropy 0  
 열역학 제 4법칙  
 $S = k \ln \Omega \rightarrow 1 \Rightarrow 0$

$\Rightarrow$  '양자통계역학'이 발달.

**CMB** cosmic microwave background



- 슈뢰딩거  
 : 새로운 negative entropy라  
 $\rightarrow$  새로운 것의 시작의 근원이 됨

• Einstein  $E = h\nu$  (주파수)  
 드브로이  $\lambda = \frac{h}{p}$  (파장)

"  $h$  (planck상수) = Action! "

(eg) 방안의 온도 300K  
 + photon 양자비 1개 add 되었을때 (1eV)  
 상태의 갯수 변화

$\Rightarrow 10^{16}$ 의 가짓수의 상태가 늘어

$$\frac{1 \text{ eV}}{300} = \frac{1000 \text{ meV}}{26 \text{ meV}} = 39 \Rightarrow e^{39}$$

(eg) 꽃밭. 한칸이 Energy 여러개 (photon은 비준다)  
 꽃이 피었다

$\leadsto$  무한대에 가까운 '상태'가 존재

$\times 10^{29}$ 의 양자

한 칸이 꽃은 피우기 위해 전 지구의  
 현상이 link 되었다.

Boltzmann, Gibbs 등이 최초로 일정한  
 천체과학자들...

$$S = \log_e \Omega \rightarrow \text{상태의 갯수}$$

$$S = k \ln \Omega$$

$\hookrightarrow$  Boltzmann 상수 (factor) Energy 마다

( $\therefore$ ) 모든 것은 '상태'로 설명할 수 있는 미시적준원

$$U = Q - W$$

$$dU = Td\underbrace{S}_{\Delta Q} - PdV + \mu dN$$

$$\Delta Q = 0 \text{ (단열과정)} \quad \Delta N = 0$$

$$U \text{ (내부에너지)} = E$$

$$dE = -PdV$$

$$E = mc^2 = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho c^2$$

시간에 따른 미분  
대해  
r 바뀌

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$\dot{V} = \frac{4\pi}{3} \cdot 3r^2 \cdot \dot{r} \quad \left( \dot{r} = \frac{dr}{dt} \right)$$

$$dE + PdV = 0$$

(r, p)에 대해  
각각 미분

$$\frac{4\pi}{3} \cdot 3r^2 \cdot \dot{r} \rho c^2 + \frac{4\pi}{3} r^3 \dot{\rho} c^2 + p \frac{4\pi}{3} \cdot 3r^2 \cdot \dot{r} = 0$$

$$\left( \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot c^2 \text{은 } \frac{4}{3} E \right)$$

$$3 \frac{\dot{r}}{r} \rho + \dot{\rho} + p \cdot 3 \frac{\dot{r}}{r c^2} = 0$$

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{r}}{r} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 \quad \leftarrow w p c^2$$

(5 page (150쪽 참조))

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{r}}{r} (\rho + w p) = 0$$

(미분)

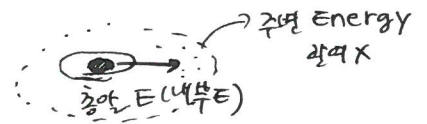
$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{r}}{r} \rho (1+w) = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -3 \frac{\dot{r}}{r} \rho (1+w)$$

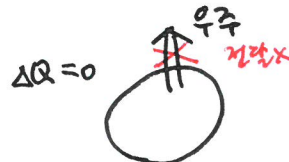
$$\frac{d\rho}{\rho} = -3 (1+w) \frac{\dot{r}}{r} dt$$

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = -3 (1+w) \int \frac{\dot{r}}{r} dt$$

$$U \text{ (내부에너지)} = E$$



• 열역학 → 우주론으로 정렬된다



$$\text{"구" 부피} : \frac{4}{3} \pi r^3$$

→ 물리적 속성은  
장악하는  
가장 중요한  
개념

유체방정식

$$\ln \rho = -3(1+w) \ln r + c$$

$$= c \ln r^{-3(1+w)}$$

$$\rho = \rho_0 R^{-3(1+w)}$$

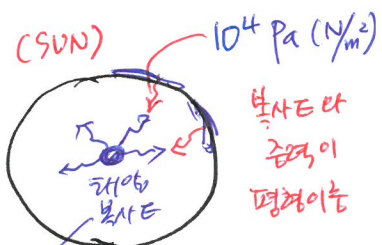
$$\text{MDU } w=0$$

$$\rho = \rho_0 R^{-3}$$

$$\text{RDU } w=\frac{1}{3}$$

$$\rho = \rho_0 R^{-4}$$

(5 page 중점적으로 정리)



$$2 \times 10^{11} \text{ (N/m}^2\text{)}$$

복사압이 중력을 이겨낼만큼 크다

$$P = \frac{1}{3} a T^4$$

$$\left( 17.5 \times 10^{-16} \right)$$

$$30^\circ\text{C} \rightsquigarrow 0$$

(π라상시 태양 압력 0  
태양 중심의 압력  
10<sup>10</sup>)

→ 빛을 많이 내다간다.  
지구 자체가 방사열 압력의  
압력

복사압부터 (344)

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dP}{dt}$$

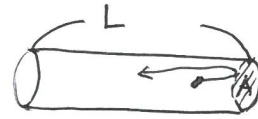
$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{2mVx}{\left(\frac{2L}{Vx}\right)} = \frac{mVx^2}{L} = \frac{\gamma Vx^2}{3L}$$

$$P = \frac{F}{A} = \frac{N \cdot \frac{\gamma Vx^2}{3L}}{A} = \frac{N m Vx^2}{3AL}$$

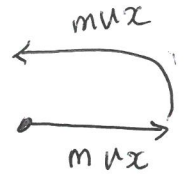
$$= \frac{N \cdot m}{3V} Vx^2 \quad (\rightarrow \text{밀도}) \rho$$

$$= \frac{\rho}{3} Vx^2 = \frac{Vx^2}{3c^2} \rho c^2 = w \rho c^2$$

$$W = \frac{Vx^2}{3c^2} \rightarrow \left( \begin{array}{l} N_2 \quad 500 \text{ m/sec} \\ C \quad 3 \times 10^8 \text{ m/sec} \\ h\nu \rightarrow w = \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

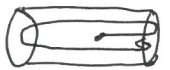


한번 움직일 때  
이사이기에



$$\Delta V = 2mVx$$

$$\Delta t = \frac{2L}{Vx}$$



2번 움직일 때  
중복  
2L

$$MDU \quad w=0 \quad p=p_0 R^{-3}$$

$$RDU \quad w=\frac{1}{3} \quad p=p_0 R^{-4}$$

$$RDU \quad w=\frac{1}{3}$$

$$\dot{p} + 3 \frac{\dot{r}}{r} p \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\dot{p} + 4 \frac{\dot{r}}{r} p = 0$$

$$\dot{p} + 4H p = 0$$

$$\dot{p} = -4H p$$

$$\dot{p} = -4 \left( \frac{8\pi G}{3} \rho \right)^{\frac{1}{2}} \rho$$

$$\rho^{-\frac{3}{2}} \dot{p} = - \left( \frac{128\pi G}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \rho^{-\frac{3}{2}} d\rho = - \left( \frac{128\pi G}{3} \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

(→ bpage ni 472b)

"아 ~ 재밌다 ~ ~ ~" 라고  
재미있다.

$$\frac{\dot{r}}{r} \equiv H \quad (\text{허블상수})$$

• flat한 우주

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{GMm}{r}$$

• potential이 0이면

$$\rightarrow \frac{1}{2} m v^2$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

$$v = Hr$$

$$\frac{1}{2} m H^2 r^2 - \frac{GM}{r} \frac{4\pi}{3} r^3 \rho = 0$$

$$H = \frac{8\pi G}{3} \rho$$



우주를 향해  
로켓을 쏜다.

Action (Energy) Force

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{GMm}{r}$$

지구각속도 → 대기로  
11.2 km/sec

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{GMm}{r}$$

$$v_s = \sqrt{\frac{2GM}{12}} = 11.2 \text{ km/sec}$$

정지속도 3 km/sec

달공전속도 1 km/sec



$$\dot{\rho} = -4H\rho = -4\left(\frac{8\pi G}{3}\rho\right)^{\frac{1}{2}}\rho$$

$$\rho^{-\frac{3}{2}}\dot{\rho} = -\left(\frac{128\pi G}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \rho = \frac{d\rho}{dt}$$

$$\int \rho^{-\frac{3}{2}} d\rho = -\left(\frac{128\pi G}{3}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\frac{1}{-\frac{3}{2}+1} \rho^{-\frac{3}{2}+1} = -\left(\frac{128\pi G}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t$$

$$\rho^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{32\pi G}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t$$

$$t = \left(\frac{3}{32\pi G\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$$

• photon의 상대론 압력,  $\rho = 2/3$ 가

$$\begin{cases} P = \frac{1}{3}aT^4 \\ P = \rho c^2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}aT^4 = \rho c^2$$

$$\therefore \rho = \frac{aT^4}{c^2}$$

우주의 밀도가  
temp와 연결됨

$$t = \left(\frac{3}{32\pi G\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{3}{32\pi G \frac{aT^4}{c^2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3c^2}{32\pi G a}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{T^2}$$

(\*) 시간경과의 대략 온도(T)의 변화

$$T^2 = \left(\frac{3c^2}{32\pi G a}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t}$$

$$T = \left(\frac{3c^2}{32\pi G a}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{t}} = 1.5 \times 10^{10} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$a = 7.56 \times 10^{-16} \text{ J/m}^3 \text{ K}^{-4}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

$$G = \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$T = 1.5 \times 10^{10} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

( $\therefore$ ) 시간(t)을 알면 T(온도)를 알수있다.

Bigbang ~ 5만년 가까이 각광되는 순간

: RDU

$t = 10^{-6} \text{ sec}$  big bang 직후  $10^{-6} \text{ sec}$  직후

$$T = 1.5 \times 10^{10} \frac{1}{\sqrt{10^{-6}}} = 1.5 \times 10^{13} = 1 \text{ GeV}$$

$$\sqrt{10^{-6}} = \sqrt{(10^{-3})^2} = \frac{1}{10^{-3}} = 10^3$$

$$\begin{matrix} \text{Giga} & & & \\ 10^9 & & & \\ \text{온도} & 10^4 & \text{GeV} \end{matrix} \quad 9 + 4 \rightarrow 13$$

→ Boltzmann 상수 ( $8.6 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$ )

• 양생자 938 MeV  $\approx 1 \text{ GeV}$

( $\therefore$ ) 양생자를 만들 수 있는 온도

bigbang 이후  $10^{-6} \text{ sec}$  이후

양생자 생성됨.

$$\text{온도 } 10^{32} \text{ K} \rightarrow 10^{19} \text{ GeV}$$

$$10^{24} \text{ K} \rightarrow 10^{14} \text{ GeV}$$

Grand Unified theory (GUT)

$$10^{15} \text{ K} \leftarrow 100 \text{ GeV}$$

weak-이론  $(W^\pm, Z^0)$

"Standard Model"

같은 체계라 「치환의 3분」  
"대칭성의 리모"  $(W^\pm \rightarrow 80 \text{ GeV})$   
 $(Z^0 \rightarrow 91 \text{ GeV})$

$r \rightarrow 0$

(점자기 상호작용)

$$\underbrace{9}_{\text{Giga } 10^9} + \underbrace{4}_{\text{Poltzmann } 10^4} \rightarrow 13 \xrightarrow{\text{GeV}} \text{GeV}$$

$2.6 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$

$$\begin{aligned} 10^{32} \text{ K} &\rightarrow 10^{19} \text{ GeV} \\ 10^{27} \text{ K} &\rightarrow 10^{14} \text{ GeV} \quad \text{GUT (grand unified theory)} \\ 10^{15} \text{ K} &\leftarrow 100 \text{ GeV} \end{aligned}$$

$(W^\pm, Z^0) \gamma$

Weak force

"Standard Model"

같은 체계다.

$$\begin{aligned} (W^\pm &\rightarrow 80 \text{ GeV}) \\ (Z^0 &\rightarrow 91 \text{ GeV}) \end{aligned}$$

$$\gamma \equiv 0$$

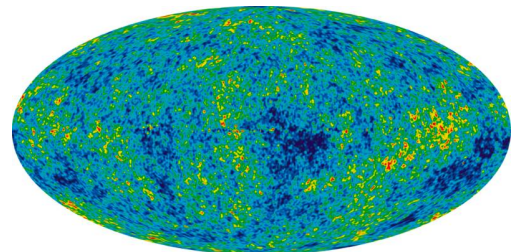
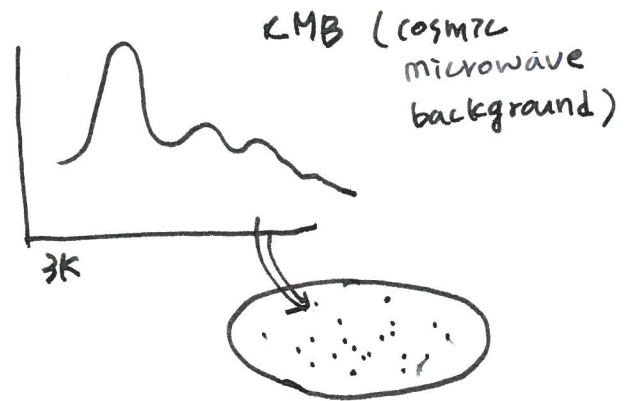
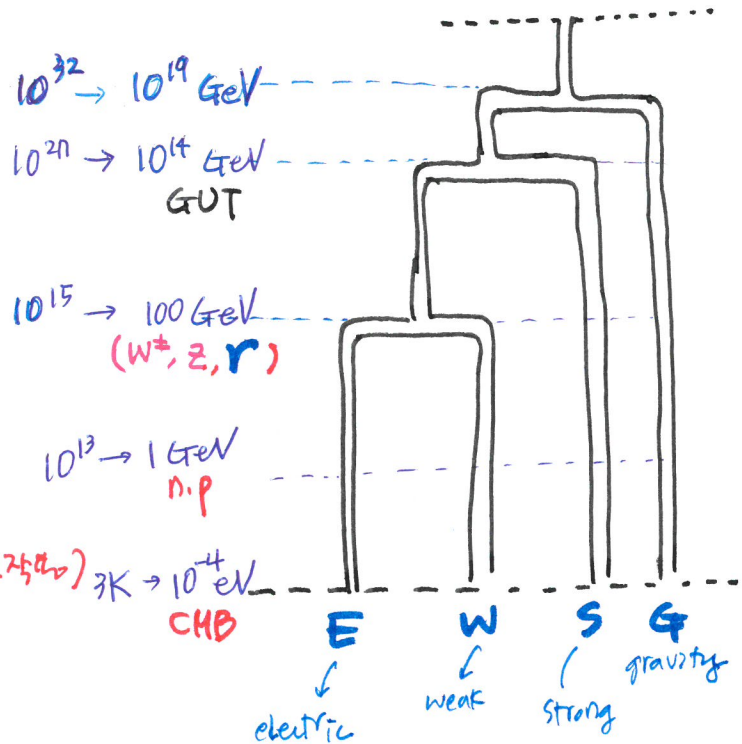
"대칭성의 회복"

$$10^{13} \text{ K} \rightarrow 1 \text{ GeV}$$

양성자- 양성자 MeV  $\approx 1 \text{ GeV}$   
 (∴) big bang 이후  $10^{-6}$  sec 이후  
 양성자 생성될 수 있는 온도에 도달

$$3 \text{ K} \rightarrow 10^{-4} \text{ eV} \quad \text{CMB}$$

- (∴) 지금 우주는 광자로 가득  
 그 속이 우리가 묻어있다.  
 우주 전체가 '광자'로 가득차 있다.



$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}mg^2$$

$$\Rightarrow F \cdot x$$

(하·거)

$$W = \int F \cdot dx$$

force를 거분 → E

$$= \int \frac{dp}{dt} dx$$

$$= ma = \left\{ \frac{dz}{dt} \right\} dp$$

$$= \int v dc m v$$

$$= m \int v dv$$

$$= m \frac{1}{2} v^2$$

$$(F=ma \approx \text{거분} \rightarrow \text{Energy})$$

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$\left[ \left( \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 - H_0^2 \left( \frac{\rho_{mo}}{R^3} + \frac{\rho_{rel-o}}{R^4} + \frac{\rho_{\Lambda o}}{\rho_{co}} \right) \right] R^2 = -Kc^2$$

$$\left( \frac{dR}{dt} \right)^2 = H_0^2 \left( \frac{\Omega_{mo}}{R} + \Omega_{\Lambda o} R^2 \right)$$

$$\int dt = \frac{1}{H_0} \int \frac{dR}{\sqrt{\frac{\Omega_{mo}}{R} + \Omega_{\Lambda o} R^2}}$$

$$t = \frac{1}{H_0} \int \frac{\sqrt{R} dR}{\sqrt{\Omega_{mo} + \Omega_{\Lambda o} R^3}}$$

분자분모  
√R 곱함

$$= \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_{mo}}} \int \frac{\sqrt{R} dR}{\sqrt{1 + \left( \frac{\Omega_{\Lambda o}}{\Omega_{mo}} \right) R^3}}$$

(거분거분)

[Friedmann Eq]

$$\left[ \left( \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho \right] R^2 = -Kc^2$$

반지름

(≡ 우주의 팽창을 거  
시간에 대한 반지름의 변화 알기)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_c$$

critical density

$$\frac{8\pi G}{3} = \frac{H_0^2}{\rho_{co}}$$

현재 H 상수  
현재 critical density

$$\left[ \left( \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{H_0^2}{\rho_{co}} (\rho_m + \rho_{rel} + \rho_{\Lambda}) \right] R^2 = -Kc^2$$

$\rho_{co}$  ↑  
matter relative dark energy

$$\rho = \rho_0 R^{-3(1+w)}$$

현재 밀도

$$\rho_0 = R^3(1+w) \rho$$

MDU (matter dominant universe)  $w=0$

$$\rho_{mo} = R^3 \rho_m \leftarrow \rho_0 = R^3 \rho$$

RDU (radiation " " )  $w=\frac{1}{3}$

$$\rho_m = \frac{\rho_{mo}}{R^3} \leftarrow \rho_0 = R^4 \rho$$

ΛDU (dark energy " " )  $w=-1$

$$\rho_0 = \rho$$

$$\left[ \left( \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{H_0}{\rho_{co}} \left( \frac{\rho_{mo}}{R^3} + \frac{\rho_{rel-o}}{R^4} + \rho_{\Lambda o} \right) \right] R^2 = -Kc^2$$

$$\Omega_{mo} = \frac{\rho_{mo}}{\rho_c}$$

$$\Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c}$$

(거분거분)



$$t = \frac{1}{H_0} \int \frac{\sqrt{R} dR}{\sqrt{\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda 0} R^3}}$$

$$= \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_{m0}}} \int \frac{\sqrt{R} dR}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right) R^3}}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right) R^3} \equiv x$$

$$\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right) R^3 = x^2 - 1$$

$$\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)^{\frac{1}{3}} R^2 dR = 2x dx$$

$$t = \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_{m0}}} \int \frac{R^{\frac{1}{2}} \cdot 2x dx}{x \left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)^{\frac{1}{3}} R^2}$$

$$= \frac{2}{3 H_0 \sqrt{\Omega_{m0}} \left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)^{\frac{1}{3}}} \int \frac{dx}{R^{\frac{3}{2}}}$$

$$R^3 = \left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right) (x^2 - 1)$$

$$t = \frac{2}{3 H_0 \sqrt{\Omega_{m0}}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}} (x^2 - 1)}}$$

$$= \frac{2}{3 H_0 \sqrt{\Omega_{m0}}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left[ x + \sqrt{x^2 - a^2} \right]$$

$$t = \frac{2}{3 H_0 \sqrt{\Omega_{m0}}} \ln \left[ x + \sqrt{x^2 - 1} \right]$$

현재 우주의 나이를  
알게 된다.

$$t = \frac{2}{3 H_0 \sqrt{\Omega_{m0}}} \ln \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right) R^3} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right) R^3} \right]$$

WMAP  
COBY  
Frank → EU 공동체

Hubble 상수

$$[H_0]_{\text{WMAP}} = 2.3 \times 10^{-18} \text{ sec}$$

$$\Omega_{m0} = \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{m0} = 2.27$$

$$\Omega_{\Lambda 0} = 0.73$$

$$R_0 = 1 \quad (\text{현재})$$

$$R = 10^{-10} \sim 1$$

(지금 우주의 나이)

$$t_0 = 4.32 \times 10^{17} \text{ sec}$$

$$= 1.37 \text{ Gy} = 137 \text{ 억년}$$

(∴) 이 모든 것의 유래는

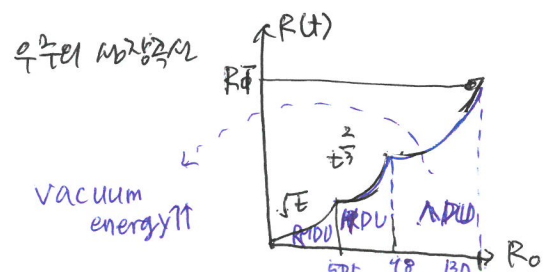
$$E = T + V$$

→ 이 유래는  $F = ma$

(∴) 우리 우주의 나이는 현재 137억년

이 사실을 알게 된 것은 1660년

→ Newton 이후 과학이 발전했음



[ 우주의 팽창 역사 ]

$$\sinh^{-1} x = \ln [ x + \sqrt{x^2 + 1} ]$$

$$\frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} = \ln \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m 0}} \right) R^3} + \sqrt{\left( \frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m 0}} \right) R^3} \right]$$

$$= \sinh^{-1} \left( \sqrt{\left( \frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m 0}} \right) R^3} \right)$$

arc (-)

hyperbolic

sin

$$\sinh(\sinh^{-1} x) = x$$

$$\sinh \left( \frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} \right) = \sqrt{\left( \frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m 0}} \right) R^3}$$

$$\sinh^2 \left( \frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} \right) = \left( \frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m 0}} \right) R^3$$

$$R^3 = \left( \frac{\Omega_{m 0}}{\Omega_{\Lambda 0}} \right) \sinh^2 \left( \frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} \right)$$

$$R = \left( \frac{\Omega_{m 0}}{\Omega_{\Lambda 0}} \right)^{\frac{1}{3}} \sinh^{\frac{2}{3}} \left( \frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} t \right)$$

$$\left( \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$$

$$R = \left( \frac{\Omega_{m 0}}{\Omega_{\Lambda 0}} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{e^{\frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} - e^{-\frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}}{2} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$R = \left( \frac{\Omega_{m 0}}{4 \Omega_{\Lambda 0}} \right)^{\frac{1}{3}} \left( e^{\frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} - e^{-\frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

①  $H_0 t \gg 1 \quad t \gg \frac{1}{H_0} = t_H \quad t \gg t_H$   
Hubble time

$$R(t) = \left( \frac{\Omega_{m 0}}{\Omega_{\Lambda 0}} \right)^{\frac{1}{3}} e^{H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}$$

②  $H_0 t \ll 1 \quad t \ll t_H$

$$R(t) = \left( \frac{\Omega_{m 0}}{\Omega_{\Lambda 0}} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$R(t) = \left( \frac{\Omega_{m 0}}{\Omega_{\Lambda 0}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

• 공간 Energy x

우주 초기 : dark energy 사라지고  
matter "만남"

$$R(t) = \left( \Omega_{m 0} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{t}{t_H} \right)^{\frac{2}{3}}$$

⇒ "MDU" 시대 시작

MDU

$\sinh x \cong x$   
(아주 작은 때)

$\sinh^{-1} \cong x$

$$\left( x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}} = x^1$$

# [Friedmann Eq]

↪  $F=ma$  이기 때문

$$\left[ \left( \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho \right] R^2 = -kc^2$$

(답은 미리 생각해)

$$R = \left( \frac{t}{t_0} \right)^x$$

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) = 0 \quad \text{플로이드 방정식}$$

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{x \left( \frac{t}{t_0} \right)^{x-1} \frac{1}{t_0}}{\left( \frac{t}{t_0} \right)^x} = \frac{x}{\frac{t}{t_0}} = \frac{x}{t} = H$$

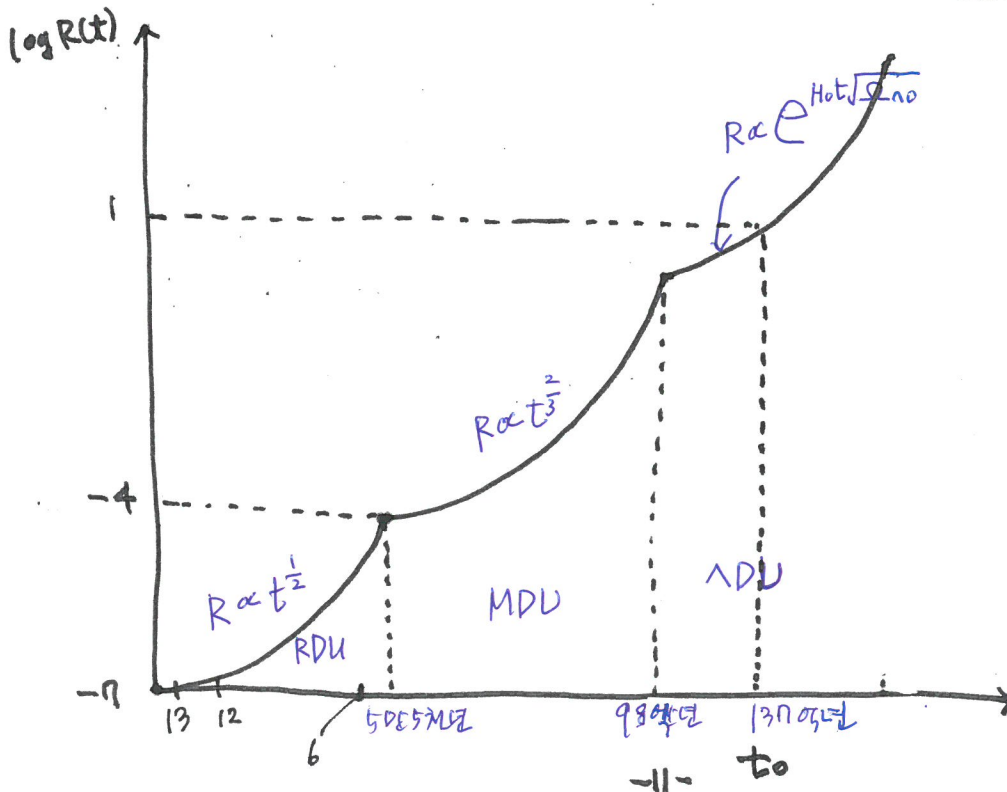
$$H_0 = \frac{x}{t_0}$$

(RDU)  $w = \frac{1}{3} \rightarrow R(t) = t^{\frac{1}{2}}$

(MDU)  $w = 0 \rightarrow R(t) = t^{\frac{2}{3}}$

(ADU)  $w = -1 \rightarrow R(t) = e^{\text{Hot} \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} t}$

\*  $\rho$  값의 변화

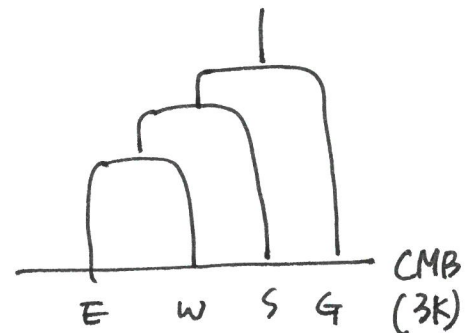


$$T = 1.5 \times 10^{10} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$= t^{-\frac{1}{2}}$$



- \* Milky way 수백 : 98억년과 비슷
- \* "Dark energy" 발견이 하나 남은 상태.



WMAP  
(Planck)

microwave

≡ photon의 파장

\* 1178년 이전

$$F=ma$$

이 중간의

기원을 안다.



## [ 제5회 137억년 우주진화 제2강 칠판내용 참조 ]

$$Z \quad \text{---} U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GM}{r} \frac{4\pi}{3}r^3\rho$$

$$r(t) = a(t)x, \quad a(t)=1$$

$$\dot{r} = \dot{a}x$$

$$U = \frac{1}{2}m\dot{a}^2x^2 - \frac{4\pi}{3}a^3x^3\rho$$

$$\frac{2U}{m\dot{a}^2x^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2}}$$

$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho\right]R^2 = -Kc^2$$

$$\parallel a(t) \rightarrow a(t)=1$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c \rightarrow \frac{8\pi G}{3} = \frac{H^2}{\rho_c}$$

$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{H^2}{\rho_c}(\rho_0 + \rho_m + \rho_\Lambda)\right]R^2 = -Kc^2$$

$$\rho = \rho_0 R^{-3(1+w)} \quad \boxed{R^{3(1+w)}\rho = \rho_0} \quad R^3\rho = \rho_0$$

$$R^3\rho_m = \rho_{m0} \quad \rho_\Lambda = \rho_{\Lambda0} \quad \rho_0 = \frac{\rho_{m0}}{R^3} \quad \frac{\rho_{m0}}{\rho_c} = \Omega_{m0}$$

$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{H_0^2}{\rho_c}\left(\frac{\rho_{m0}}{R^3} + \frac{\rho_{m0}}{R^3} + \rho_{\Lambda0}\right)\right]R^2 = -Kc^2$$

$$\left[\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{H_0^2}{\rho_c}\left(\frac{\rho_{m0}}{R} + \frac{\rho_{m0}}{R^2} + \rho_{\Lambda0}R^2\right)\right] = 0$$

Friedmann 방정식

$$\left[\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - H_0^2\left(\frac{\Omega_{m0}}{R} + \frac{\Omega_{m0}}{R^2} + \Omega_{\Lambda0}R^2\right)\right] = 0 \quad t = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{m0}}} \int \frac{R \, dx}{x\left(\frac{\Omega_{m0}}{R^3} + 1\right)^{3/2}}$$

$$\frac{dR}{dt} = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{R} + \Omega_{\Lambda0}R^2} \quad \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{m0}}} \int \frac{dx}{\left(\frac{\Omega_{m0}}{R^3} + 1\right)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{H_0} \int \frac{dR}{\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{R} + \Omega_{\Lambda0}R^2}} = t \quad = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{m0}}} \int \frac{dx}{\left(\frac{\Omega_{m0}}{R^3} + 1\right)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{m0}}} \int \frac{R \, dR}{\sqrt{1 + \frac{\Omega_{m0}}{R^3}}} = t \quad = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{m0}}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \quad \left\{ \begin{array}{l} e^x dx = e^x \\ (e^x)^y = e^{xy} \end{array} \right. \quad R(t) = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda0}}\right)^{1/3} \sinh^{2/3}\left(\frac{3}{2}H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda0}}\right)$$

$$\sqrt{1 + \frac{\Omega_{m0}}{R^3}} = x \quad t = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{m0}}} \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad = \left(\frac{\Omega_{m0}}{4\Omega_{\Lambda0}}\right)^{1/3} \left(e^{\frac{3}{2}H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda0}}} - e^{-\frac{3}{2}H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda0}}}\right) = \sinh x$$

$$x^2 - 1 = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda0}}\right)R^3 \quad H_0 t \gg 1 \rightarrow t \gg \frac{1}{H_0} \rightarrow t \gg t_{H,0}$$

$$2x dx = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda0}}\right)3R^2 dR \quad \boxed{t = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{m0}}} \ln\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda0}}\right)R^3} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda0}}\right)R^3}\right]} \quad R(t) = \left(\frac{\Omega_{m0}}{4\Omega_{\Lambda0}}\right)^{1/3} e^{\frac{H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda0}}}{2}}$$

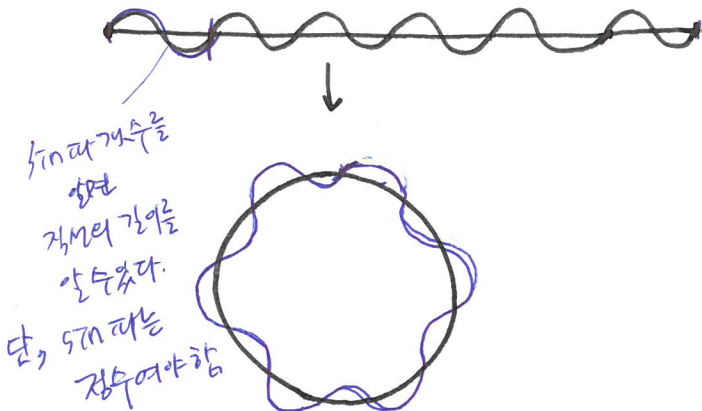
$$H_0 t \ll 1 \rightarrow t \ll t_H$$

$$R(t) = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda0}}\right)^{1/3} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} (H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda0}})^{2/3}$$

$$R(t) \propto t^{2/3}$$

$\Omega_{m0} = 0.31 \quad \Omega_{\Lambda0} = 0.69$   
 $R(t) = 1.379 \text{ Gpc}$

$$[E = h\nu]$$



원 안에 들어가는 파장의 개수를 셀다  
(직경 길이 = 원 길이)

$$n\lambda = 2\pi r$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{2\pi r}{n} = \frac{2\pi r h}{n h} = \frac{r h}{n \frac{h}{2\pi}}$$

$$= \frac{r h}{n \hbar}$$

$$= \frac{h}{\left(\frac{n \hbar}{r}\right)} = \frac{h}{n \left(\frac{J \cdot sec}{m}\right)} \quad \frac{Nm \cdot sec}{m} = N \cdot sec$$

$$n\lambda = \frac{h}{n(N \cdot sec)}$$

$$\rightarrow F = ma = n \cdot \frac{m}{sec} \cdot kg \frac{m}{sec} \rightarrow \underline{mv} = p$$

$$n\lambda = \frac{h}{n \cdot p}$$

$$(\therefore) \lambda = \frac{h}{p}$$

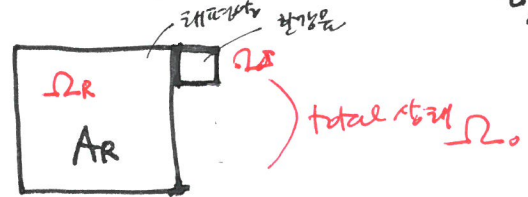
• Entropy : 대개  $\Omega$ 로 count 하는 방법  
"energy state"를

[photon 은 count 하는 방법]

Energy의 "state"

entropy : 양자가 들어갈 수 있는 에너지의 state를 count 한다.

(thermal bath)



CMB : 우주 초기 상태를 생각 (중요한 점) - 열역학적 해석. 중성자

boson : 한 자리 여러개 (무한대) ↑  
fermion : 한 자리 한개 (양자 상태 제한)

$$dU = TdS - pdV + \mu dN$$

$$\Omega_0 = \Omega_R \Omega_A$$

한 자리의 상태가 하나 = 1  
비어있는 상태는 그 상태가 없음

$$= \Omega_R = e^{\ln \Omega_R}$$

(∴) 무지 하게 많거나 무한대는 아닐

$$S_R = k \ln \Omega_R$$

$$\Omega_R = e^{\frac{S_R}{k}}$$

$$S_R = \underbrace{S_R^0}_{\text{자유 입자의 엔탈피}} - \underbrace{\Delta S}_{\text{자유 입자의 엔탈피가 감소한 정도}}$$

$$\Delta S = \frac{1}{T} (dE + p dV - \mu dN)$$

$$= S_R^0 - \frac{1}{T} (\Delta E + p \Delta V - \mu \Delta N)$$

$$\Omega \uparrow \rightarrow P \uparrow$$

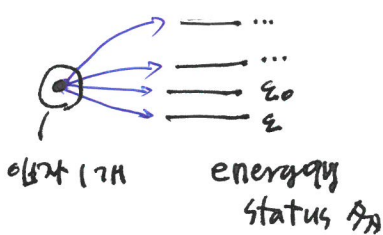
상대 ↑      압력 ↑

$$\Omega_R = e^{\frac{S_R}{k}} = e^{\frac{1}{k} [S_R^0 - \frac{1}{T} (\Delta E + p \Delta V - \mu \Delta N)]}$$

$$= e^{\frac{S_R^0}{k}} e^{-\frac{1}{kT} (\Delta E + p \Delta V - \mu \Delta N)}$$

$$= C e^{-\beta (\Delta E + p \Delta V - \mu \Delta N)} = P$$

$$P = C e^{-\beta (\Delta E + p \Delta V - \mu \Delta N)}$$

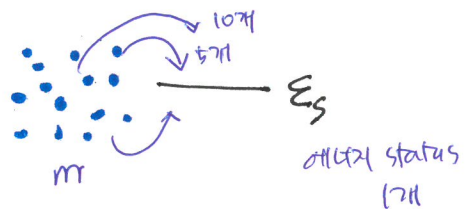


$$P_s = C e^{-\beta \epsilon_s}$$

$$\Delta N = 0$$

$$\Delta V = 0$$

$$\Delta E = \epsilon_s$$



$$\Delta E = m \epsilon_s$$

$$\Delta N = n$$

에너지가 m x 에너지 상태

$$P = C e^{-\beta (n \epsilon_s - \mu n)}$$

$$P_n = C e^{-\beta n (\epsilon_s - \mu)}$$

$$\beta (\epsilon_s - \mu) \equiv x$$

$$\bar{n} = \frac{\sum P_n}{\sum P_n} = \frac{\sum n e^{-nx}}{\sum e^{-nx}} = \frac{\partial}{\partial x} \ln$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \ln (\sum e^{-nx})$$

$$\rightarrow \sum e^{-nx} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = 1 + e^{-x} \quad \text{Fermi}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}} \quad \text{Boson}$$

$$dN = \left( \frac{d^3r d^3p}{h^3} \right) \bar{n}(\epsilon)$$

$$= \frac{V 4\pi p^2 dp}{h^3} \bar{n}(\epsilon)$$

$$E = pc \quad p = \frac{E}{c} \quad dp = \frac{dE}{c}$$

$$= \frac{8\pi V^2}{c^3} \frac{h\nu \cdot d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$U(\nu, T) = \frac{8\pi V^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad \text{CMB}$$

### Standard Model of Elementary Particles

three generations of matter (fermions)				
I	II	III		
mass charge spin				
~2.4 MeV/c <sup>2</sup> 2/3 1/2	~1.275 GeV/c <sup>2</sup> 2/3 1/2	~172.44 GeV/c <sup>2</sup> 2/3 1/2	0 1 1	~125.09 GeV/c <sup>2</sup> 0 0
u up	c charm	t top	g gluon	H Higgs
~4.8 MeV/c <sup>2</sup> -1/3 1/2	~95 MeV/c <sup>2</sup> -1/3 1/2	~4.18 GeV/c <sup>2</sup> -1/3 1/2	0 0 1	
d down	s strange	b bottom	γ photon	
~0.511 MeV/c <sup>2</sup> -1 1/2	~105.67 MeV/c <sup>2</sup> -1 1/2	~1.7768 GeV/c <sup>2</sup> -1 1/2	0 0 1	
e electron	μ muon	τ tau	Z Z boson	
~2.2 eV/c <sup>2</sup> 0 1/2	~1.7 MeV/c <sup>2</sup> 0 1/2	~15.5 MeV/c <sup>2</sup> 0 1/2	~80.39 GeV/c <sup>2</sup> ±1 1	
ν <sub>e</sub> electron neutrino	ν <sub>μ</sub> muon neutrino	ν <sub>τ</sub> tau neutrino	W W boson	

에너지가 크면 (= 고에너지) 준  
값(상태)이 준다  
에너지가 작으면 (= 저에너지)  
상태가 준다