제 11회 우주의 진화 4강 측지선 방정식 및 Noether 정리

(박문호 박사님 강의를 요약 정리한 내용입니다.)

작용량이 얼마나 광범위하게 쓰이는가를 알아야 한다..

작용량, 대칭, 라그랑지안 등의 기호 들이 계속 나온다. 용어에 익숙해 져야 한다.

라그랑지안을 적분하면 작용이 된다.

라그랑지안= 운동에너지 – 위치에너지이다. L=T-V

해밀토니안=운동에너지+위치에너지이다.

H=T+V, T=$\frac{1}{2}mv^2$ 운동 에너지는 속도의 함수이고, V는 V(r)로서 위치의 함수이다.

에너지는 운동에너지와 위치에너지 2가지 밖에 없다.

열도 운동 에너지 이다. 물질을 구성하는 원자의 운동에너지가 열이다.

뜨거운 솥에 손을 대면 뜨거움을 느낀다. 열 받은 솥의 철 원자들이 상상을 초월하는 진동을 한다.

결정 구조이기 때문에 멀리 이동하지는 않고 엄청나게 빠른 속도로 제자리 뛰기를 한다고 생각하면 된다.

그 원자의 진동(운동 에너지)이 우리 손가락 세포로 전달되면 손가락 세포들이 화상을 입게 된다.

열은 운동에너지이다.

석유는 화학 결합 에너지이다. 차가운 돌도 원자로 구성되어 있다. 암석은 대부분 결정이다. 반도체 결정 속에서도 스프링처럼 원자들이 진동한다. 그 진동 주파수에 의해 열 에너지를 계산 할 수 있다. 모든 에너지는 분해해 보면 운동에너지와 위치에너지로 구성되어 있다.

우주에는 2가지 에너지 밖에 없다. 2가지 에너지가 다양한 형태로 존재하는 것이다.

위치(potential)에너지의 대표적인 것이 중력이다. 인간도 사회적 위치에따라 그 사람이 쓸 수 있는 힘이 다르다. VIP도 사회적 권력의 위치이다. V(r)은 거리(혹은 위치)의 함수이다. 중력은 힘(force)이다. 거리의 제곱에 반비례한다.($\frac{1}{r^2}$)

중력에 해당하는 potential 에너지는 중력을 적분하면 나온다.

중력의 위치에너지는 반지름에 반비례한다.($\frac{1}{r}$)

물리학을 잘할려면 vector벡타인지 scalar스칼라인지, force인지 energy인지를 빨리 구분할 줄 알아야 한다.

온도는 scalar이다. 크기도 있고 방향도 있으면 vector이다.

전자기력은 번개나 감전 등 국부적인 문제이지만 중력은 우주 전체에 관한 문제이다.

$a' = a$

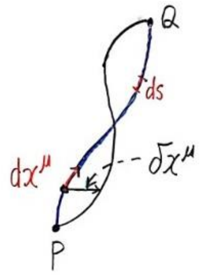
오늘 강의의 핵심이다. 뉴턴 역학에서 가속도가 모든 관성계에 동일하게 적용된다는 뜻이다. 뉴턴 역학이 다른 세계에도 통용된다는 것이다. 좌표변환을 해도 불변이라는 것이다. 지난 주에 갈릴레이 좌표변환과 로렌츠 좌표

변환을 배웠다. 전자기 현상(빛)을 포섭하기 위해 갈릴레이 변환을 로렌츠 변환으로 바꾸었다.
로렌츠 변환의 다른 이름이 특수 상대성 이론이다.
아인슈타인이 광속 불변의 원칙을 추가함으로서 시간과 공간의 개념이 바뀌었다.

중력은 특별한다. 중력은 우주 그 자체이다. 지구의 중력은 미약하다. 막대 자석으로 머리 핀을 공간에 뛰울 수 있다. 즉 지구의 중력이 미시적으로 보면 막대자석의 힘과 동일할 정도로 미약하다는 것이다.
그러나 우주 전체적으로 보면 중력의 힘은 무지막지하게 크다. 우주는 갤럭시 등의 중력에 의해 치즈처럼 구멍이 덤성덤성나 있는 모습이다. 구멍이 곡률이고 곡률은 중력이 만든 것이다. 중력은 우주의 구조이다.

측지선 방정식을 다시한다. 지난 주에 했다.
메트릭텐서를 미분하면 크리스토펠이 나오고, 크리스토펠을 미분하면 곡률이 나온다.
$(g^{\mu\nu})' \rightarrow (\Gamma^i_{\mu\nu})' \rightarrow R_{\mu\nu}$

지난 주에는 Γ(크리스토펠)을 알고 있다고 가정하고 넘어 갔다.
새로운 Language이므로 훈련해야 한다.
00:32
측지선 방정식은 우주의 모든 물체들이 이동하는 길이다. 측지선은 vector의 평행이동이다.
(이하 동영상을 시청하시기 바랍니다.)



$dx^\mu = dx^\mu(s)$

$\delta x^\mu(s_P) = \delta x^\mu(s_Q) = 0$ $\quad\quad$ $\delta \rightarrow \partial_\mu$

$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$ $\quad\quad$ $[\delta, \partial_\mu] = 0$

$$L = \int ds \qquad \delta L = 0 \qquad \delta \int ds = 0 \qquad \int \delta ds = 0$$

$$\delta(ds^2) = 2\, ds\, \delta ds$$

$$\delta(g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) = \delta(g_{\mu\nu})\, dx^\mu dx^\nu + \underset{\displaystyle g_{\mu\rho}\,\delta(dx^\rho)\, dx^\mu}{\underbrace{g_{\mu\nu}\,\delta(dx^\mu)\, dx^\nu}} + \underset{\displaystyle g_{\mu\rho}\, dx^\mu\, \delta(dx^\rho)}{\underbrace{g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, \delta(dx^\nu)}}$$

$$\delta ds = \frac{1}{2}\delta(g_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}dx^\nu + g_{\mu\rho}\,\delta(dx^\rho)\frac{dx^\mu}{ds}$$

$$\delta ds = \frac{1}{2}\frac{\delta(g_{\mu\nu})}{\delta x^\rho}\delta x^\rho \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} + g_{\mu\rho}\frac{\delta(dx^\rho)}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} \qquad \times\frac{ds}{ds}$$

측지선은 최단 거리이다. 평면에서는 직선이 최단 거리이다. 곡면에서 최단 거리를 나타내는 선이 측지선이다. 측지선을 따라가는 선을 dx^{μ}로 적는다. 변분을 나타내는 것은 $\boldsymbol{\delta}x^{\mu}$로적는다. S는 측지선의 한 선분 요소이다. 그것을 ds로 적는다. ds는 고유 시간이다.

측지선은 s의 함수이다. $dx^{\mu} = \mathrm{d}x^{\mu}(s)$

마디 점에서는 변동이 제로이다.

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$$

4차원 피타고라스 정리이다. 여기서 $\mathrm{d}s^2$은 빗변의 길이이며 tensor이다.

대칭, 공변, 불변과 같은 의미가 tensor性이다. Tensor적 성질을 갖고 있다는 뜻이다.
상대성이론에서 tensor라고하면 대칭, 공변, 불변을 만족하는 값이다.
크리스토펠이나 F=ma 는 tensor가 아니다. 중력도 tensor가 아니다. 그러나 ds^2은 tensor이다.
우주 공간에 막대가 떠 다닌다면 그것은 지구에서 보나, 혹성 X에서 보나 동일한 크기가 된다.
좌표계에 무관하다.

Tensor는 vector도 scalar도 된다. 0차원 tensor는 scalar이고, 1차원 tensor는 vector이다.
tensor는 한 좌표계에서 모든 요소가 0이면 다른 좌표계에서도 모두 0가 된다. 한 좌표계에서 해당되면 모두 해당 된다. 중력이 tensor가 아닌 것은 지구 상 모든 점에서 중력이 영향을 미쳐야 하는데, 자유 낙하하는 엘리베이터 속에서는 중력이 힘을 미치지 못하기 때문이다. Tensor는 예외가 있으면 안 된다. Tensor는 좌표계에 무관하다.

어린이에게 구슬이나 딱지는 큰 재산 이다. 어린이 좌표계에서는 그렇다.
어른이 되면 좌표계가 화폐경제로 바뀐다.
Value는 어느 좌표계에서 있느냐에 따라 다르다. 인문학이나 자연과학 동일하다.

우리가 갖는 모든 value는 측정된 값이다. 측정된 값에는 어느 좌표계에서 측정했는지 반드시 밝혀 주어야 한다. 우리가 갖는 모든 value도 내가 갖고 있는 좌표 시스템에서만 측정 될 수 있다. 측정을 하려면 저울의 눈금이 있어야 한다. 저울의 눈금, 자의 눈금을 scale이라 한다. 물리학의 최고 정점은 척도불변(Scale invariance)이다.

왜 꽃 밭은 항상 꽃 밭처럼 보이고 사람은 항상 사람처럼 보일까
우주를 한 조각 떼어 내어도 그 한 조각도 우주이다. 한 의학에서는 인간을 소우주라고 한다. 정확하게 scale invariance이다. 그것이 우주의 설계도이다. 가장 근본적이 설계도가 우주의 한 부분을 꺼집어 내어도 우주라는 것이다. 절대적 사이즈는 달라도 그 사이의 비례는 변하지 않는다. 그래서 공변이라고 한다.
왜 세상은 이 모양으로 되어 있는지를 설명한다. 좌표변환일 뿐이다.

우리가 알고 있는 모든 자연은 측정해서 알게 되었다.
어린이는 딱지와 초코렛을 교환해 봤기 때문에 그 value를 안다.
그러나 어른이 되어 좌표계가 바뀌면 가치가 달라진다. 우리가 느끼는 것은 측정 값이다.
좌표가 없으면 측정할 수 없다. 측정이라는 정의 속에 좌표가 들어있다.

Tensor가 무서운 이유는 좌표에 무관하기 때문이다. 좌표에 무관한 동일한 물리량이 Tensor이다.
주먹으로 벽을 치면 조금 밖에 들어가지 않는 반면, 주먹으로 솜 뭉치를 치면 쑥 들어간다. 변형된 정도는 물체에 따라 다르지만 나의 주먹의 세기는 동일하다. 이것이 tensor이다.

물리학은 tensor 량을 찾는 것이다. 불변량을 찾는 것이다. 불변 량을 갖고 이론을 전개한다.
측지선 방정식에서 중력은 tensor가 아니다. 가속도도 tensor가 아니다.
그러나 놀랍게도 2개를 결합한 측지선 방정식은 tensor이다.
그래서 이 방정식이 위대하다. 우주의 law가 되었다.
기타 줄의 길이 L은 ds를 적분하면 된다. L=$\int ds$
길이의 변분이 제로가 되는 것이 측지선이다. **δ**L=0
즉 **δ**$\int ds$=0 가 되고 $\int$**δ**ds=0 와 같은 것이다.
ds^2를 미분하면
δ(ds^2)=2ds**δ**ds 가 된다.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\delta(g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)=\delta(g_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu}\delta(dx^\mu)+ g_{\mu\nu} dx^\mu \delta(dx^\nu)$$

$$\delta ds = \left[\frac{1}{2}\frac{\delta(g_{\mu\nu})}{\delta x^\rho}\delta x^\rho \overbrace{\frac{dx^\mu}{ds}}^{U^\mu}\overbrace{\frac{dx^\nu}{ds}}^{U^\nu} + g_{\mu\rho}\frac{\delta(dx^\rho)}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}\right]ds$$

$$\delta L = \int \delta ds = \int \left[\frac{1}{2}\frac{\partial(g_{\mu\nu})}{\partial x^\rho} U^\mu U^\nu \delta x^\rho + g_{\mu\rho}\frac{d(\delta x^\rho)}{ds} U^\mu\right]ds$$

$$u' = \frac{d(\delta x^\rho)}{ds} \qquad v = U^\mu g_{\mu\rho}$$

$$\int u' = u = \int_P^Q \frac{d(\delta x^\rho)}{ds} ds \qquad v' = \frac{d}{ds}(U^\mu g_{\mu\rho})$$

$$= \delta x^\rho$$

$$\delta x^\rho_{P,Q} = 0$$

$$\delta L = \int \left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} U^\mu U^\nu \delta x^\rho - \frac{d}{ds}(U^\mu g_{\mu\rho})\delta x^\rho\right]ds = 0$$

$$\frac{d}{ds}(U^\mu g_{\mu\rho}) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} U^\mu U^\nu = 0$$

$$\frac{d}{ds}(U^\mu g_{\mu\rho}) = U^\mu \frac{dg_{\mu\rho}}{ds} + g_{\mu\rho}\frac{dU^\mu}{ds}$$

$$= g_{\mu\rho}\frac{dU^\mu}{ds} + U^\mu \frac{dg_{\mu\rho}}{dx^\nu}\frac{dx^\nu}{ds}$$

U^ν

$$g_{\mu\rho}\frac{dU^\mu}{ds} + \frac{dg_{\mu\rho}}{dx^\nu}U^\mu U^\nu - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}U^\mu U^\nu = 0$$

$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$$g_{\mu\rho}\frac{dU^\mu}{ds} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu}U^\mu U^\nu + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu}U^\mu U^\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}U^\mu U^\nu = 0$$

$$g_{\mu\rho}\frac{dU^\mu}{ds} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right)U^\mu U^\nu = 0$$

제 1종 Christofell $\Gamma_{\rho\mu\nu}$

$\times g^{\lambda\rho}$

$$g^{\lambda\rho}g_{\mu\rho}\frac{dU^\mu}{ds} + g^{\lambda\rho}\Gamma_{\rho\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0$$

$$\delta^\lambda_\mu\frac{dU^\mu}{ds} \qquad \frac{dU^\lambda}{ds} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0 \qquad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = g^{\lambda\rho}\Gamma_{\rho\mu\nu}$$

제2종 Christofell

$$\frac{dU^\lambda}{ds} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0$$

geodesic eq.

$$\frac{m_i a}{m_g} = \frac{m}{m}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = ma$$

관성력

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{d^2x}{ds^2} \qquad \frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0$$

4차원 중력 $(g_{\mu\nu})$

$$\frac{dU^\lambda}{ds} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}U^\mu\frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

$$dU^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}U^\mu dx^\nu = 0$$

벡터 $U^\lambda \rightarrow dx^\nu$ 만큼 평행이동

중력장 방정식

물질-에너지 $\rightleftarrows$ 시공 곡률

측지선 방정식

$\frac{du^\lambda}{ds}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=0$ 이것이 Geodesic equation이다.

$u^\lambda = \frac{dx^\lambda}{ds}$ 이므로

$\frac{d}{ds}(\frac{dx^\lambda}{ds})=\frac{d^2x^\lambda}{ds^2}$ 이것이 가속도이다. 여기에 질량을 뉴턴 방정식이 된다.

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0$$

$u^\nu=\frac{dx^\nu}{ds}$ 이므로

$\frac{du^\lambda}{ds}+\Gamma^\lambda_{uv}u^\mu\frac{dx^\nu}{ds}=0$ 양변에 ds를 곱해주면

$du^\lambda + \Gamma^\lambda_{uv}u^\mu dx^\nu=0$

이것이 vector의 평행이동 형태로 쓴 측지선 방정식이다.

4차원 속도베타 u^λ를 dx^ν 만큼 평행 이동했다는 말이고, 평행이동 했음에도 결과가 0라는 뜻이다.

그것이 측지선의 정의이다.

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0$$

$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2}$는 관성력이다.

$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$는 metric tensor이다. 즉 시공의 곡률이다. 시공의 곡률은 중력에서 왔다. 즉 중력을 나타낸다.

측지선 방정식이 함축하는 바는

물질에너지에 의해서 시공의 곡률이 결정된다. 이 과정에 작용하는 것이 중력장 방정식이다.

시공의 곡률에 의해 물질이 가는 길이 결정된다. 물질이 가는 길이 측지선 방정식이다.

중력장 방정식과 측지선 방정식은 쌍으로 되어 있다. 측지선을 따라 간다는 것은 최 단거리로 떨어진다는 뜻이다. 자유낙하 한다. 떨어지는 중에는 힘이 제로이다.

힘이 제로인 이유는 관성력과 중력이 같아지기 때문이다.

$\frac{m' a}{mg} = \frac{m'}{m}$ 중력과 가속도가 같다. 중력과 가속도를 구별할 수 없다. 우주의 길은 정해져 있다.

축구공이 가는 길과 총알이 가는 길, 풍선이 가는 길은 모두 같다. 우리는 착각하고 있다. 시간을 빼고 생각하고 있기 때문이다. 동일한 시간대의 곡률은 모두 같다. 진공 속에서 깃털과 농구 공을 떨어뜨린 결과 정확하게 같이 떨어졌다. 가속도는 같다. 실험을 해 보면 지구상에 어떤 물건을 던져도 동일한 시간대에서는 동일한 궤도로 간다.

우리의 브레인은 틀렸다. 우리 브레인은 느린 속도 속에서 진화해 왔기 때문에 광속의 1/10,000도 보지 못한다. 광속의 1/10,000 이 초속 30km이다. 지구의 중력에 의해 휘어진 곡률은 지구 반지름의 1/27,000 만큼 휘어져 있다. 우리는 전혀 감지하지 못한다. 그러나 GPS는 일반상대성 이론을 쓴다.

우리가 틀렸다는 것을 반드시 인식하기 바란다.

(2교시)

척도 불변성대하여 공부합니다.

어려운 것을 공부할 때에는 이것을 배우면 이득이 있을 것이라는 욕심을 내야 한다. 어려워서가 아니라 공부에 대한 욕심이 없어서 버티지 못한다.

20세기 최고의 수학자는 괴팅겐 대학의 힐버트 였다.

"대학이 공중 목욕탕인 줄 아느냐?"

Noether를 채용하기 위한 교수회의에서 여성이라서 곤란하다는 교수들에게 힐버트가 한 말이다.

지금부터 Noether theorem을 증명하는 일이다.

뇌테르 정리의 증명을 바탕으로 입자물리학이라는 학문이 설립되었다고 할 정도로 중요한 증명이다.

보존법칙과 대칭과의 관계를 증명했다.

대칭이 성립되면 보존법칙이 있다. 그것을 토대로 펼쳐진 학문이 입자물리학이다.

자연과학은 heiarchy가 있다. 입자물리학이 가장 위고, 다음 모든 것을 해결해 준 것이 양자역학, 그 다음이 일반

상대성 이론이다. 그 모든 것이 최소 작용의 원칙에 의해서 설명이 가능하게 되었다.

CERN의 최초의 과학적 큰 발견은 1972년 중성류(NEUTRAL CURRENT) 발견이었다.
입자물리학의 획을 그은 사건 이었다
전자기 전류는 우주의 charge중 하나이다. 20세기 모든 문화는 전자기 전류가 갖고 있다.
우주 전체로 봤을 때 전자기 전류보다 더 중요한 전류가 있다.
전기가 없는 입자에 의해 생성된 전류를 neutral charge라 한다.

1950년대 양-밀즈 이론이 재 규격화가 되는냐가 초미의 관건이었다.
당시 입자물리학에서는 무한대 값을 처리하지 못하면 그 이론은 사장되었다. 양-밀즈 이론이 실질적인 우주를 설명하는 이론인지 의견이 분분할 때, 네덜란드 출신 대학원생 투우프가 양-밀즈 이론이 재 규격화(renomalization)가 가능하다는 것을 증명하였다.
당시 페르미 연구소 입자물리학 과장 이었던 이휘소 박사가 투우프의 증명에 힘을 실어 주었다.
그 이야기가 중성류와 척도 불변성 및 뇌테르 정리와 관련이 된다.

중성류가 전자기 상호 작용의 1/1,000 밖에 되지 않는다. 과포화된 수증기가 들어 있는 거품 상자에 전기를 띤 입자가 지나가면 수증기가 응결이 된다. 거미줄에 새벽 이슬 맺힌 것처럼 입자가 가는 길이 보인다. 그것을 사진을 찍는다. 중성류를 검증하는데 사진 1백4십만 장을 체크했다. 그 중에 딱 3장이 중성류를 증명하는 사진이 있었다. CERN의 첫 번째 위대한 발견이었다. 1973년도에 CERN에서 공식적으로 발표하였다.

뇌테르 이론은, 세상이 왜 이렇게 되었고 사람은 왜 사람다운지 이해하는 이론이다.
뇌 과학적으로도 중요한 이야기다. 브레인이 기억하는 것은 시간과 공간 상에서 바뀌지 않는 관계이다.
그것이 입자물리학의 대칭, 보존, 불변과 같은 말이다. 관계를 기억하는 것이다.

절대적 크기는 다르지만 그 사이의 관계는 바뀌지 않는다. 공변 한다는 것이다.
이것을 우주적 관점에서 증명한 것이 Noether 이론이고, 여기에서 입자물리학이 시작한다.
"아인슈타인이 우주가 이해된다는 것이 신기하다"라고 했다.
"우주는 이해 된다"는 것이 Noether 이론이다.

태양계 행성들은 모두 거의 둥근 원형이다. 삼각형이나 네모 모양의 행성은 없다.
그래서 우리는 우주를 이해할 수 있는 것이다. 우주는 이해할 수 있다. 물리학도 어렵지 않다.
우주의 구조가 인간 브레인 구조를 진화시켰다. 동일한 구조이기 때문에 이해할 수 밖에 없다.
이해 못하는 것은 있을 수 없다.

노래를 기억하는 것도 음과 음 사이의 관계를 기억한다.애국가를 한 옥타브 높게 불러도 애국가 인 줄 안다.
관계가 불변한다는 것이다. 그것이 불변성이다.
관계는 전적으로 좌표변환 이야기이다. 어느 좌표 계에서 보느냐의 문제이다.

프라임이 붙은 것과 붙지 않은 것을 구분하면 된다. 학문은 간단해서 아름다운 것이다.

모든 학문은 작용이 최소가 되는 것을 찾는 것이다.

δs=0

δs=s'-s 여기서 S는 작용이다. 두 시스템의 작용의 차이가 0되는 것이 최소작용이다.

작용 S=$\int \mathcal{L} d^4x$이다. L→$\mathcal{L}$

입자물리학에서는 L대신 $\mathcal{L}$(라그랑지안 덴시티)를사용한다.

우리가 구하려고 하는 것은 δs=δ$\int \mathcal{L} d^4x$=0 이다.

라그랑지안은 입자가 아니라 필드를 다룬다. $\mathcal{L}=\mathcal{L}\,(\theta,\partial_\mu \emptyset, x)$ 즉 위치, 속도, 좌표를 다룬다.

(이하 동영상을 참고하시기 바랍니다.)

$$\delta S = 0$$

$$\delta S = S' - S = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0$$

$$S = \int \mathcal{L}\, d^4x \qquad L \to \mathcal{L}$$

Lagerangian density

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L}\, d^4x = 0$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x)$$

$$dS = S' - S \qquad S' = \int \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu\phi', x')\, d^4x$$

$$\underbrace{\mathcal{L}(\phi', \partial_\mu\phi', x')}_{S'} = \underbrace{\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x)}_{S} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)$$

$$S' - S = \delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)\right) d^4x$$

$\partial_\mu(\delta\phi)$

$$-\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi$$

$$u' = \partial_\mu(\delta\phi) \qquad v = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}$$

$$\int u' = \delta\phi \qquad v' = \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)$$

$\oplus$ $\ominus$

$$\delta S = S' - S = \int\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi\right] d^4x = 0$$

$\mu = t, x, y, z$ $\quad \mu = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0$$

$$\delta S = S' - S = 0$$

$$\phi'(x') = \phi(x') + \delta\phi(x')$$

$$\phi'(x') = \phi(x) + \Delta\phi$$

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \phi'(x') - \phi(x)\\ &= \phi'(x') - \phi'(x) + \phi'(x) - \phi(x)\\ &= \delta\phi(x) + \partial_\mu\phi(x)\delta x^\mu\end{aligned}$$

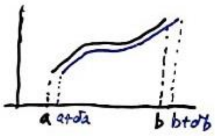
좌표변환의 문제이다.

모든 것은 작용최소에서 시작한다.

$$\delta S = S' - S = 0 \qquad R' \to R + \delta R$$

$$S' = \int_{R'} \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi', x') \, d^4x$$

$$= \int_R \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) \, d^4x$$



$$+ \int_{\delta R} \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi, x) \, d^4x$$

$$\int_{\delta R} f(x) \, dx = f(x) \int_a^b dx = f(x) \cdot x \Big|_b^{b+\delta b} + f(x) \cdot x \Big|_{a+\delta a}^{a}$$

$$= f(x) \left[(b + \delta b) - b \right] + f(x) \left[a - (a + \delta a) \right] \qquad R = [a, b]$$

$$= f(x) (\delta b - \delta a) = f(x) \, \delta x \Big|_a^b = \int_a^b \partial_\mu \left[f(x) \, \delta x \right] dx$$

$$\int_{\delta R} \mathcal{L} \, d^4x = \int_R \partial_\mu (\mathcal{L} \, \delta x^\mu) \, d^4x$$

$$S' = \int_R \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi', x) d^4x$$

$$= \int_R \left(\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) + \int_R \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) \right] d^4x$$

$S = \int \mathcal{L} \, d^4x$

$$\delta S = S' - S = 0$$

$$\delta S = \int_R \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) + \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) \right] d^4x$$

$$\delta S = \int_R \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) + \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu \right) d^4x$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right)$$

$$\delta S = \int_R \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) + \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu \right] d^4x$$

$$= \int_R \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) + \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu \right] d^4x$$

$$= \int_R \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] d^4x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \mathcal{L} \delta x^\mu = 0$$

$$\Delta\phi = \delta\phi + \partial_\mu \phi \, \delta x^\nu$$

$$\delta\phi = \Delta\phi - \partial_\mu \phi \, \delta x^\mu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \phi \, \delta x^\nu + \mathcal{L} \delta x^\mu = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \phi \, \delta x^\nu - \mathcal{L} \delta x^\mu \right] = 0$$

$\Delta\phi = \Phi_i \epsilon^i \qquad \delta x^\nu = X^\nu_i \epsilon^i$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Phi_i \epsilon^i - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \underset{\delta x^\nu}{\phi} - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \delta x^\mu \right]$$

$X^\nu_i \epsilon^i$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Phi_i \epsilon^i - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right] \delta x^\nu = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Phi_i - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right] X^\nu_i = 0$$

Θ^μ_ν

$$\Theta^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Phi_i - \Theta^\mu_\nu X^\nu_i = J^\mu_i$$

Noether Current
보존류
중성류

$$\int_R \partial_\mu J^\mu_i \, d^4x = 0$$

$e^- \rightleftarrows \nu_e$

W^+, W^- → charged current

Z^0 → neutral current
1973 CERN

전자와 뉴트리노가 인터렉션을 하면 뉴트리노는 흔적을 남기지 않는다.
전자와 뉴트리노가 충돌을 하는데 뉴트리노가 보이지 않으므로, 전자가 갑자기 나타나는 현상을 잡아야 한다.
전자 궤적 중 맥락 없이 갑자기 방향이 꺾기는 현상을 찾아야 한다.

전자와 뉴트리노 사이에 주고 받는 입자가 z^0,w^+,w^-입자이다.

이 세 입자를 1980년대에 CERN에서 발견하여 노벨 상을 받았다.
그 계열로 해서 2013년 힉스 입자까지 발견함으로써 스탠다드 모델이 완전히 정착되었다.

약한 상호 작용도 전류가 있다. z^0는 전기량이 0인데도 전류량을 측정했다. 그것이 중성류이다.
중성류를 발견하면서부터 입자 물리학에 힉스 입자까지 하이웨이가 깔렸다.
우리가 보는 전기는 전자기 상호작용이다. 우리가 쓰는 전기는 전선을 통해 흐르지만, 이것은 어떤 면에서는 국부적이다.
우주 전체가 담겨 있는 전기가 있다. 그것이 Weak charge이다. z^0,w^+,w^- 3가지에 의해 전류가 생기는데, 전기량이 없는 전류가 있다.. 그것이 중성류이다. 우주가 weak charge 바다에 잠겨 있다.
weak charge 바다(진공 field)에서 z^0,w^+,w^- 입자가 질량을 획득하는 과정이 higgs mechanism이고, 그 higgs 입자를 2013년 발견했다. 우주 전체에 관한 이야기이다.

하나의 대칭이 있으면 하나의 current가 있다.

우리가 갖는 모든 측정치는 좌표가 없이는 측정할 수 없다.
우리 인류의 문화는 각자의 기준이 있다. 각자의 좌표가 있다. 모든 인문학이 그 속에 있다.
각자의 좌표로 이야기 한다. 각자의 신념, 각자의 기억이 있다. 각자의 감정 입자도가 다르다.
커뮤니케이션의 본질은 좌표변환이다. 우주의 본질도 좌표변환이다.

좌표 변환에서 눈금의 크기는 바뀌어도 그 관계(눈금의 상대적 크기)는 바뀌면 안 된다.
그것이 scale invariant이다. 세상이 scale invariance로 만들어져 있기 때문에 우리가 세상을 이해하는 것이다.
축소되거나 확대한 것이다. 인간이 소우주라고 한다. 우주가 비율 그대로 우리에게 들어와 있다.
자 또는 저울 눈금의 비례가 바뀌지 않는다. scale invariant하다.

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \emptyset)}\Phi_{\mathrm{i}} - \Theta_\nu^\mu X_{\mathrm{i}}^\nu = \mathrm{J}_{\mathrm{i}}^\mu$
이것이 Noether current. 보존류이다.

보존류 중 하나가 electrical current이다. 그 electrical current 세계를 전자기 상호작용이라 한다.
그보다 위의 current가 있다. 그 중에 핵심이 neutral current이다.
중성류는 e^-와 ν_e가 상호 작용하는 과정에서 w^+,w^-, z^0입자가 교환된다. w^+,w^-는 charged current 가 되고, z^0 는 neutral current가된다.

$$\int_R \partial_\mu \mathrm{J}_{\mathrm{i}}^\mu d^4x = 0$$

하나의 symmetry에 대하여 하나의 보존류가 출현한다.
대칭이란 말은 보존류가 출현한다는 것이다. 전자기 상호작용에서는 electric current라 한다.

전하보존의 법칙은 물리학에서 가장 확고한 보존의 법칙이다. 전하 charge는 영원히 보존된다.
전기량은 영원히 없앨 수 없다.
모든 대칭에는 그에 상응하는 보존류가 있다..

$$\partial_{\underset{0,1,2,3}{\mu}} J_i^\mu = 0$$

$$\partial_\mu J_i^\mu = \partial_0 J_i^0 + \underbrace{\partial_i \vec{J}_i}_{\nabla\cdot\vec{J}}$$

$$\int \partial_\mu J_i^\mu \, d^4x = \int \partial_0 J_i^0 \, d^3x + \underbrace{\int \nabla\cdot\vec{J} \, d^3x}_{0} = 0$$

$$\int \underset{\frac{d}{dt}}{\partial_0} J_i^0 \, d^3x = 0 \qquad \frac{d}{dt}\underbrace{\int J_i^0 \, d^3x}_{Q} = 0 \qquad \frac{dQ}{dt} = 0 \qquad Q = 상수$$

Noether theorem
뇌테르 정리

$\partial_\mu J_i^\mu = 0$
보존류(Noether current)이다.

$\frac{dQ}{dt} = 0$
Noether theory 이다. 하나의 대칭에는 하나의 보존류가 출현한다

$$\delta S = S' - S = 0$$

↳ 작용이 좌표변환 불변

⇓

Scale invariance
척도불변

⇓

보존류 → 전자기 상호작 $Q = e^-$ (1.6×10^{-19} C)

$\frac{dQ}{dt}$ = 전류

↳ 약전자기력 → $\frac{dQ}{dt}$ = neutral current

$Q \Rightarrow \underbrace{W^+, W^-, Z^0}_{\text{weak charge}}$

우주는 weak chage 바다
잠겨있다

W^+, W^-, Z^0 ↳ 91 GeV ⇒ Higgs mechanism

↳ 80 GeV

모든 것은 좌표 변환에서 왔다.

$\delta S = S'$-S=0 에서 시작하여 여기까지 왔다.

작용이 좌표변환에 불변이다. 이것이 scale invariance, 척도 불변이다.

좌표변환의 불변에는 반드시 보존 물리량이 출현한다. 전자기 상호 작용에서는 보존량이 charge, 전기량이다.

전기량이 시간으로 바뀐 것이 전류이다.

전자기 상호작용에서는 $\boldsymbol{Q}=e^-$이다. $\frac{dQ}{dt}$ =전류 이다

약전자기력에서는 $\frac{dQ}{dt}=$ neutral current가 되고, $\boldsymbol{Q}=w^+,w^-, z^0$ 이며 z^0가 neutral current가 된다.

w^+,w^-, z^0를 부르는 이름이 weak charge이다. 우주는 weak charge에 잠겨 있다.

z^0는 91GeV이고, w^+,w^-는 각각 80GeV이다.

w^+,w^-, z^0가 질량을 획득하는 방법이 힉스 메카니즘이다. 이것이 Standard Model이다.

우리 눈에 보이는 것은 대부분 전자기 상호작용이다. 생명은 99%가 전자기 상호작용이다.

그러나 우주로 들어가는 데는 약한 상호작용을 이해해야 한다.

중성류는 e^-와 ν_e가 상호 작용하는 과정에서, w^+,w^-는 charged current가 되고 z^0는 neutral current가 된다.

자연은 이해 가능하다. 왜냐하면 scale invariant 하기 때문이다.

수고하셨습니다.