

13103년 우주 진화 5강

"양자 역학"

2013년 04월 28일

양자역학을 공부하는 곳은 어디일까? 전자 재료학과, 물리학과. 화학과 정도이다. 이 중에서도 물리학에서 다룬다. 3학년 정도에서 가장 깊이 들어간다. 또 석사. 박사 과정에서 다룬다.

물리학 밖에 양자역학을 하지 않는다고 생각하면 된다. 재료학과에서 특히 많이 필요하다. 슈뢰딩거의 강의를 듣고 분자생물학으로 전향한 물리학자가 많다. 일례로 DNA 나선 구조를 밝힌 "크릭"과 "왓슨"의 전공이 각각 물리학과 생물학이다.

양자역학은 농업혁명 다음으로 중요한 혁명이다. 질량의 기원을 밝히고 의미를 규명하는 혁명이다.

양자 역학이 무엇일까? 역학이다. 힘에 관한 학문이다. 역학의 한 형태이며 분야이다.

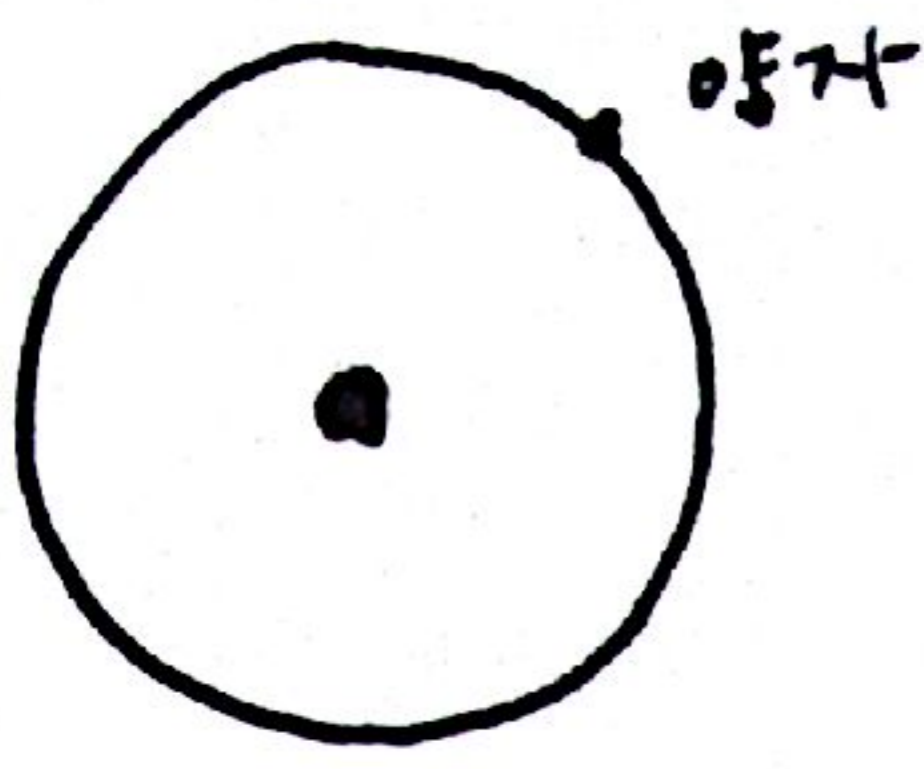
#

양자역학 = 파동 역학

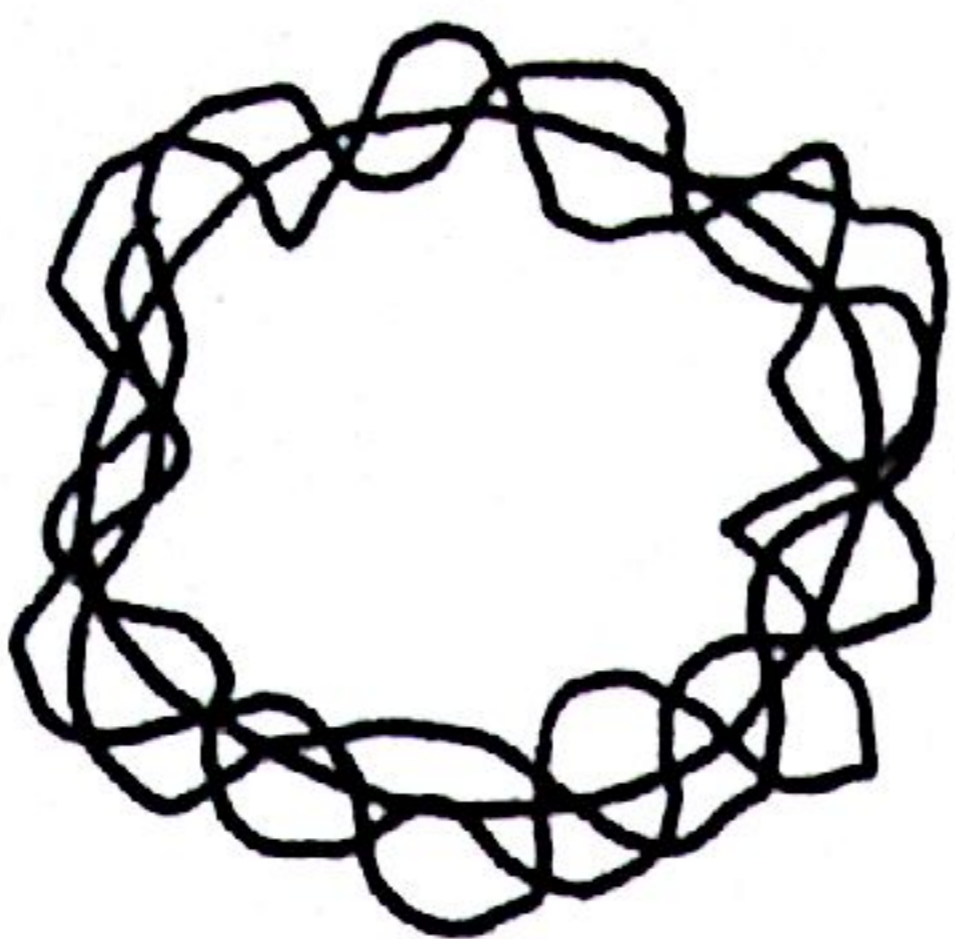
뇌에서 잘 모를 때 신비감으로 느낀다. 그래서 잘 모르는 것을 못을 두는 것을 명제를 밝히는 생각하기 때문이다. 신비는 없는 거다. 실체가 없다. 양자역학을 신비스럽게 이야기 하지 마라. 인간이 할 수 있는 것은 "Count" 밖에 없다. 1. 2. 3 ... 헤아릴 수 있는 것이 인간이 할 수 있는

진짜이다. 양자역학을 파동을 헤아릴 수 있어 탄생 하였다.

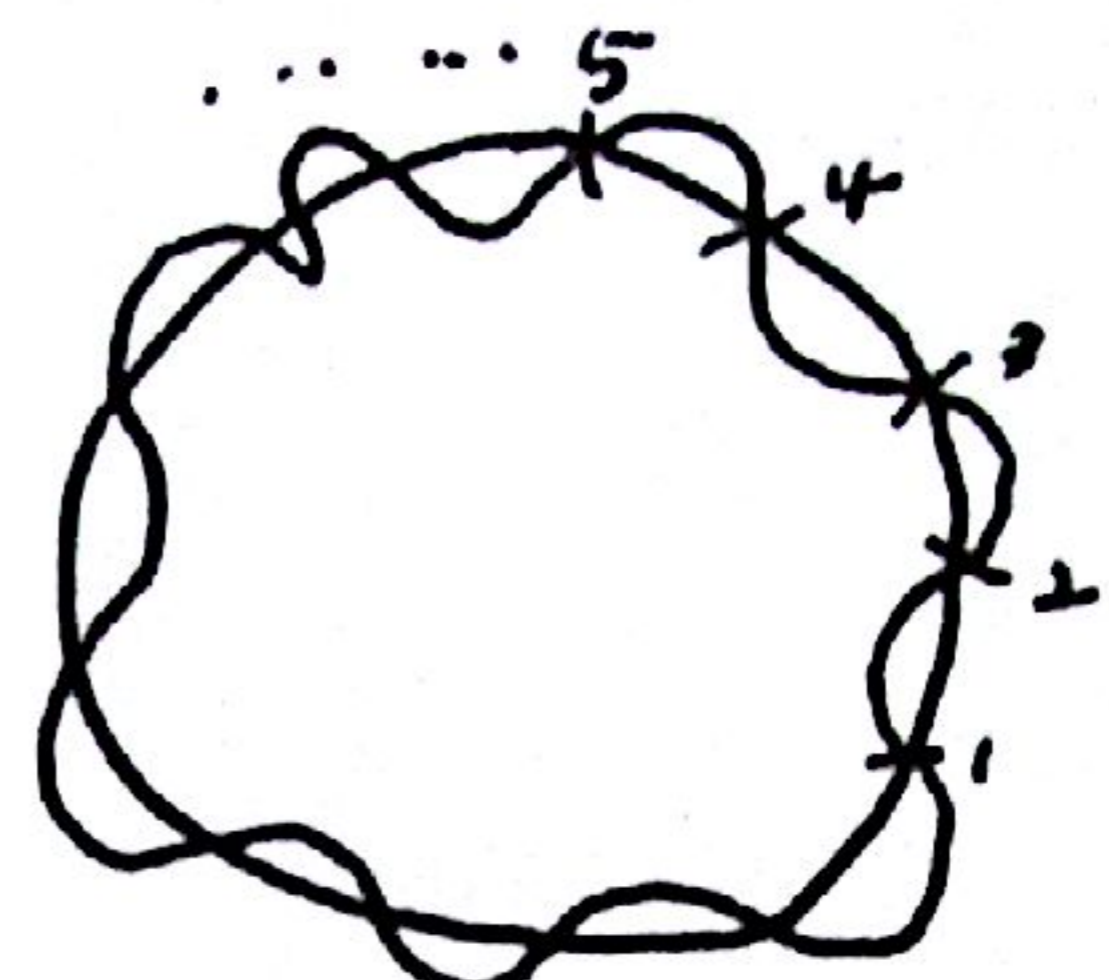
파동을 헤아리는 생각에서 출발한다.



⇒



⇒



count 한다.
나머지는
사라진다.
헤아릴 수 있는
정도의 시계가
양자역학의 시계이다.

* 양자역학의 핵심은 정도의 파동을
헤아리는 것이다.

양자역학이 언제 등장 했나?

양자역학은 역사적 산물이다. 독일, 영국, 네덜란드 등의 젊은 물리학자가
시작 했다.

양자역학의 시작은 "막스 플랑크"로 부터이다. 그 당시의 공기 산업 공예
대장을 만드는 작업이 있었다. 대장을 많이 하면 품질이 좋은 제품이
생긴다. 이것 때문에 양질의 철을 얻는 것이 관건이 된다. 그 방법으로
생각을 하고 "빔"의 질을 평가 한다. "빔"이라는 학자들이 저울자를
이용해 파악하려고 하였다. 이것을 해결한 사람이 막스 플랑크이다.
아직도 독일에서 가장 큰 명칭이 "막스 플랑크" 연구소이다. 막스 플랑크도
공업을 하면서 많은 에너지를 쏟는다. 그러나 해를 거듭 다 해보아도
해결이 되지 않는다. 그래서 에너지가 연속된 것이 아니라 불연속 하다고
가정을 한다. 여기서 "플랑크 상수"가 만들어진다.

물리 파동의 입사성을 알면 이번 강의는 다 따라갈 것이다.
10개 $\sin + \cos$ 가 있으면 α 이 속한 파동이 원을 한바퀴 돌게 만나기에 "고전"이다.

$$\begin{aligned}
 y(x, t) &= y_0 \sin \left(2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right) \\
 &= y_0 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t \right) \\
 &= y_0 \sin (kx - \omega t) \\
 &= e^{i(kx - \omega t)}
 \end{aligned}$$

공간과 시간의
함수.
파장
주기 "T"
파동의 등자의
Vector 이다.
(매이)
(코사)
파동매개에서
이러한 형태로 공하는
양자.
파동 Vector 이다
파동 Vector.
= $e^{i(kx - \omega t)}$

"공백가 가장 두렵다" 이
비명 파동을 이해하기 위해
저속하게 가서 하루종일
동맹이를 물에 던져 파동을
저거 보았다 한다.
노동을 하며 사는 그가
파동을 이해하기 위해
노력을 보낸다.

$$vT = \lambda + c \frac{1}{v} = \lambda \quad c = \lambda v$$

$$c = \lambda v \quad e^{i \left(\frac{p}{\hbar} x - \frac{E}{\hbar} t \right)} \text{ 만큼 중요하단 생각했지.}$$

$$2 \quad p = \hbar k \quad 2\pi \hbar v = \omega \quad E = \hbar \omega = \hbar 2\pi \nu$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \left(\frac{\lambda}{2}\right)n = L \quad \lambda = \frac{2L}{n}$$

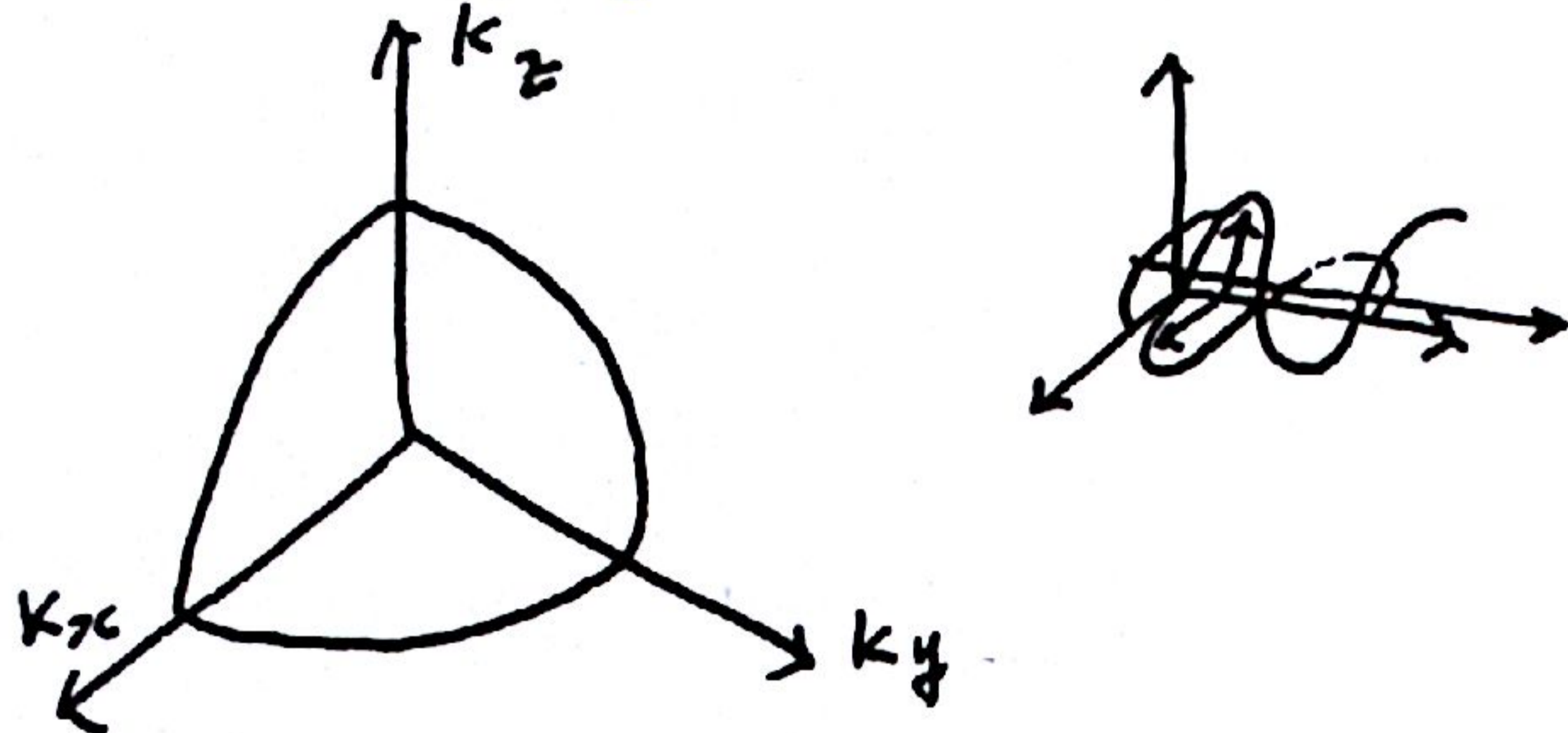
(길이)

$$k = \frac{2\pi}{\left(\frac{2L}{n}\right)} = \frac{\pi}{L} n \quad n = \frac{L}{\pi} k$$

파동의 갯수를 세기
위함이다.

$$dn_x dn_y dn_z = \frac{L_x L_y L_z}{\pi^3} dk_x dk_y dk_z$$

파동의 공간당 wave의 숫자.



k 공간의 부피를 구해보자. k 공간을 주파수로 바꾼다.
 $c = \lambda v$
 파장의 부피.

$$n(k) = 2 \times \frac{1}{8} \times \frac{4\pi}{3} k^3 \times \frac{v}{\pi^3} = \frac{vk^3}{3\pi^2} \Rightarrow \text{"4-pag-p3"}$$

Wave의 숫자 = 빛의 갯수를 헤아려준다.
 $\rightarrow nh\nu \rightarrow h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots$

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n f_n}{\sum_{n=0}^{\infty} f_n} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}$$

빛의 에너지
 분포만 남도록 놓임

$$\frac{1}{kT} = \beta$$

ϵ_n 을 $nh\nu$ 로 둔 것이 해답이다.

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-n\beta h\nu}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta h\nu}}$$

$$(e^{-ax} = -ae^{-ax})$$

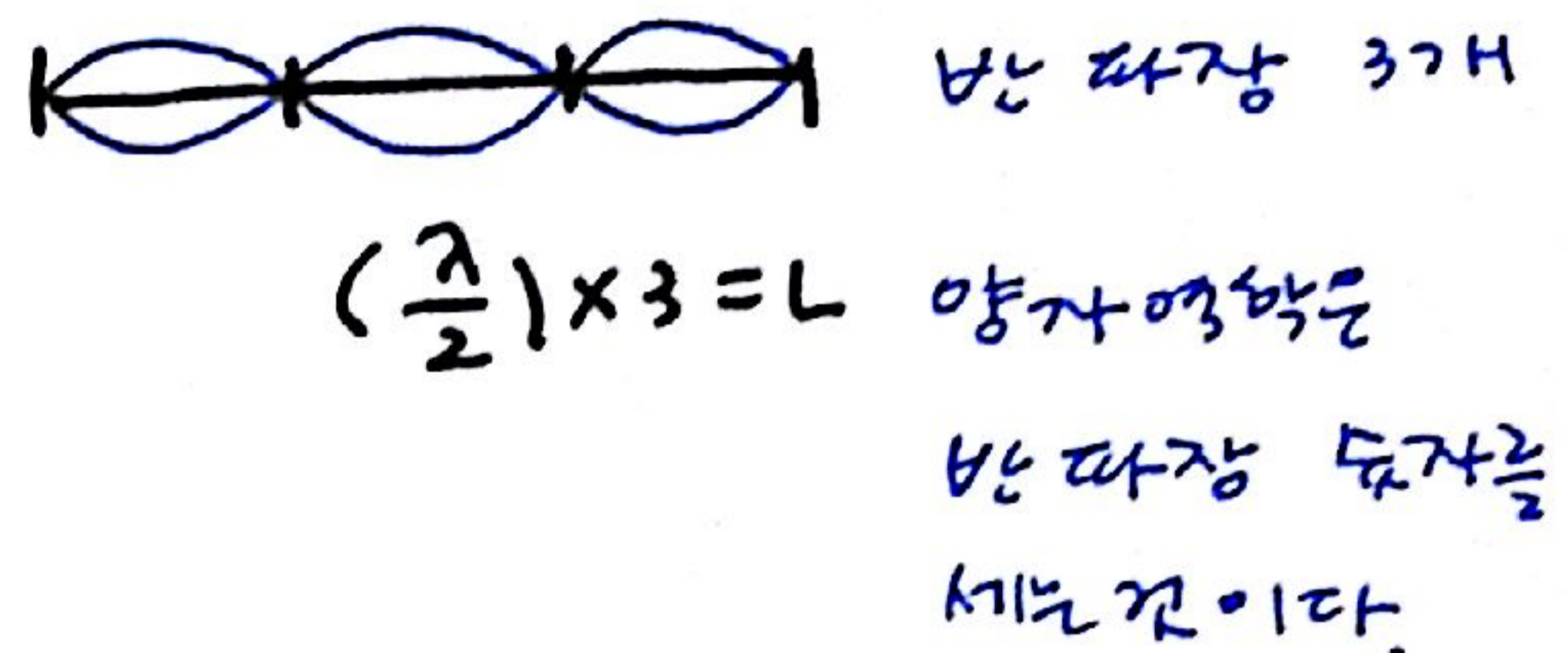
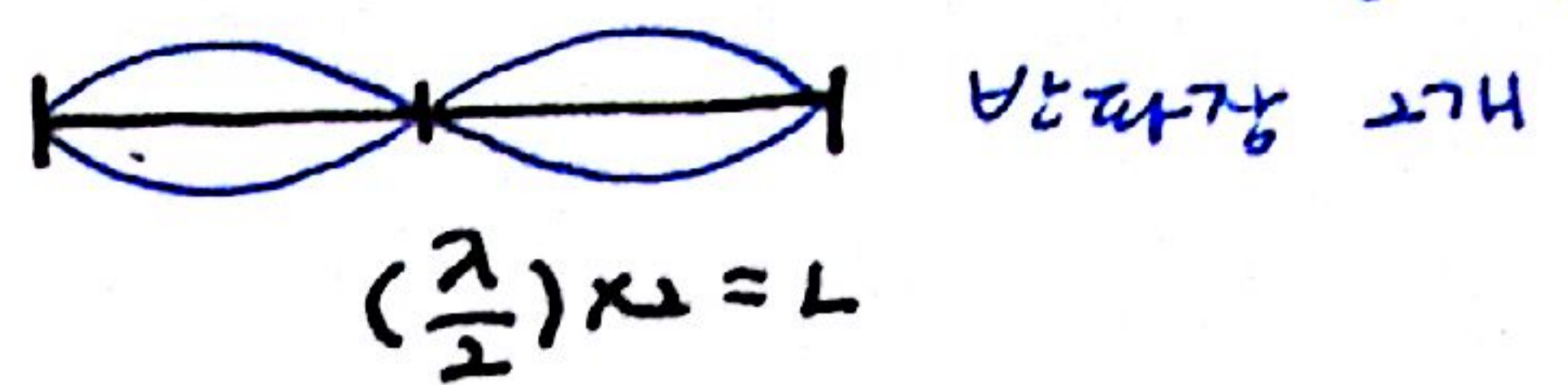
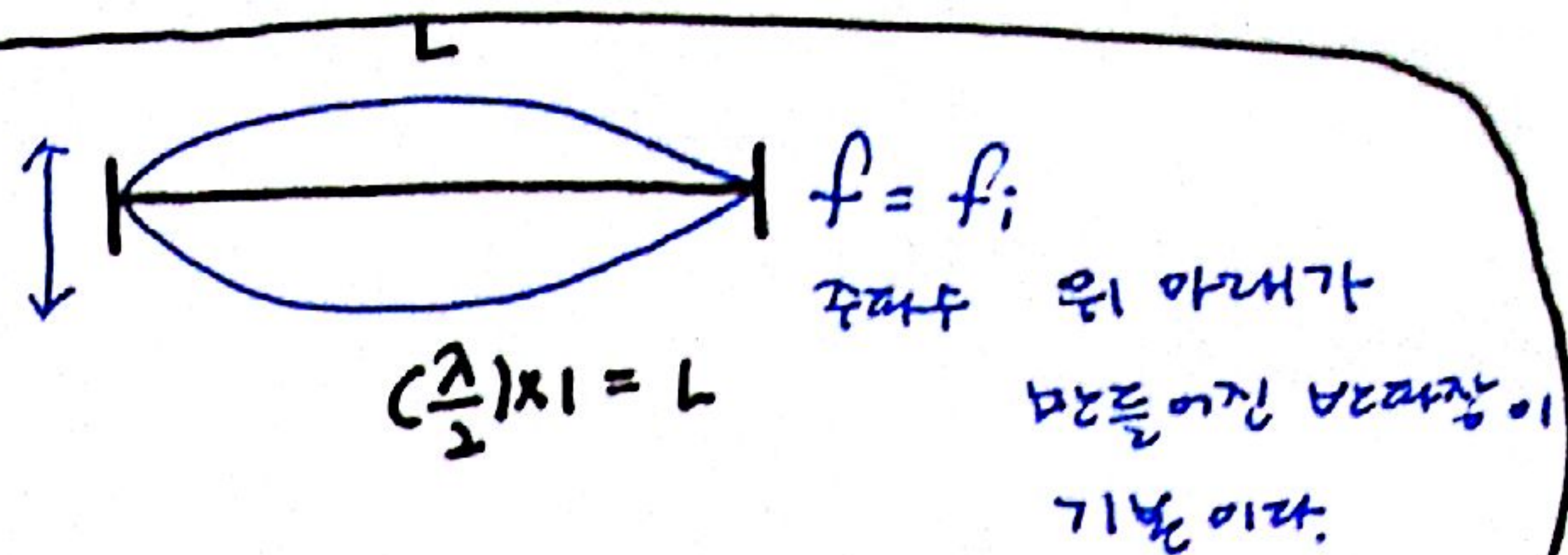
$$(\log x)' = \left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta nh\nu} \right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\ln \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(1 - e^{-\beta h\nu})$$

$$= \frac{h\nu e^{-\beta h\nu}}{1 - e^{-\beta h\nu}} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$



용광로에 있는
 덩어리가 끓어 나오는
 기체를 알기 위해
 (색깔)
 조각을 잘라낸다.
 용광로의 한 칸의 빛의
 파장을 헤아린다.
 그 파장은 기본 반파장이다.

파장별 total Energy를 알고 싶었다.
 각 파장의 파장을 구하여 계산한다.

Why? 빛의 파장 에너지를 통해
 양자의 "층"을 갈 수 있기 때문이다.

$$E_n = nh\nu$$

에너지 단위 $h\nu$ $1h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots$
 (에너지) (일) (에너지)

서양 학자들은 definition 하는 이들이
 그 정의를 기준으로 논리적으로 전개해
 나간다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta h\nu} = e^{-\beta h\nu}$$

$\rightarrow \beta$ 를 미분하면 $h\nu$ 가 나온다.

$$N(k) = \frac{vk^3}{2\pi^2}$$

$$N(k)dk = \frac{V k^2}{\pi^2} dk$$

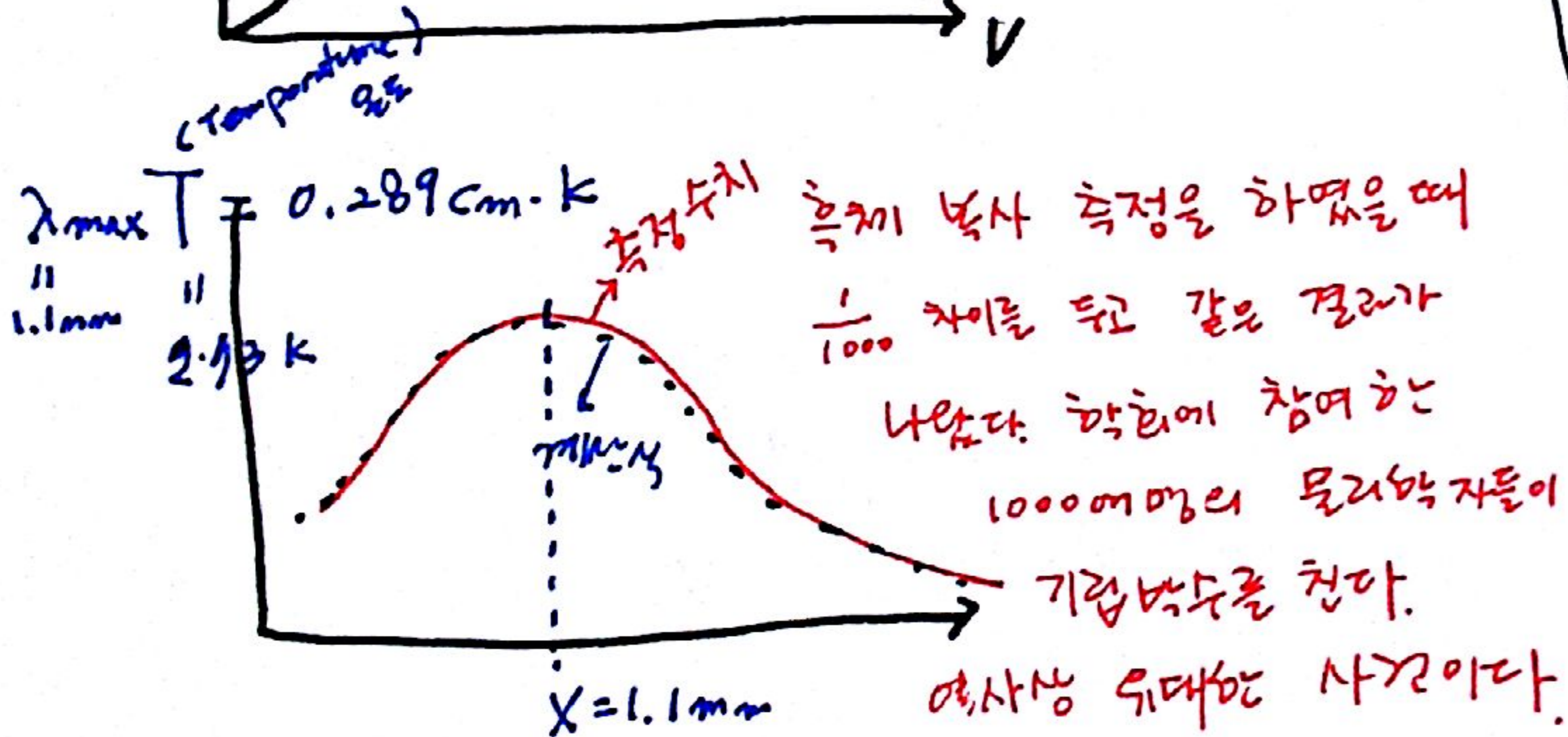
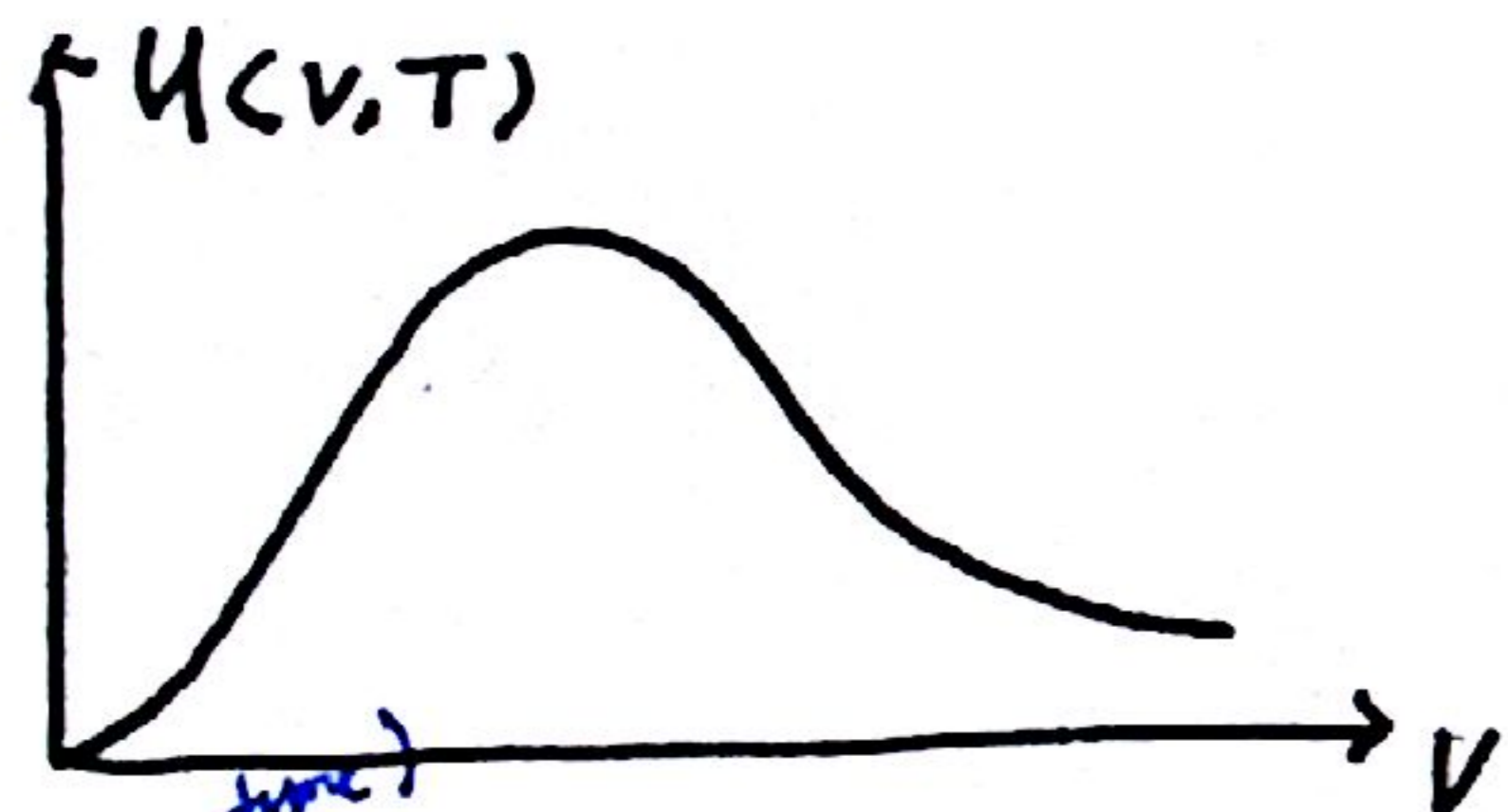
$$= \frac{V}{\pi^2} \left(\frac{2\pi}{c} \nu \right)^2 \left(\frac{2\pi}{c} \right) d\nu$$

$$= \frac{8\pi V}{c^3} v^2 dv$$

$$g(\underline{v}) = \frac{8\pi}{c^3} v^2 d\underline{v}$$

$$U(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Plank 흑채 복사
1899년 12월 발판



• 양자역학의 끝자락이 BiO 혁명이다.

현대 문명의 해를 보인 것이다.

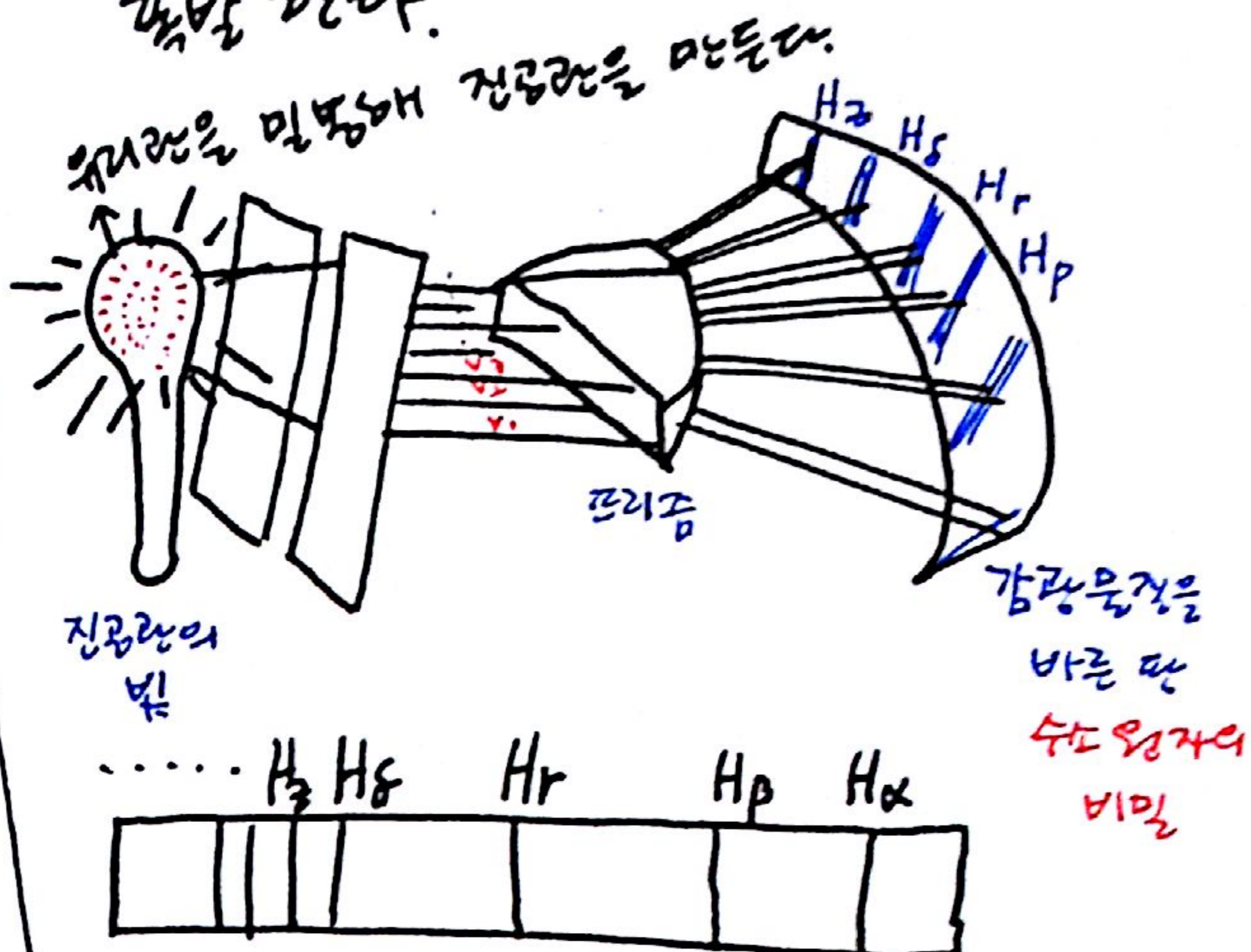
이 과정은 반사장의 두께 Count 한 것이다.

신발을 벗어발신 보면 신체가 푸어있다.

이 과정을 통해 컴퓨터, 핸드폰, 방송시각
관심사 등. 저의 삶에 얼마나 바빠야 할
것인가.

→ 성도가 대담하다. 영감받은 진리가 있을 때
성도가 각오하여 사모할지.

복도는 두 개 방의 방으로 사용하고, 완전히
상업적으로도 되어 있다. 더 방의 상업적으로
개발한다.



$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$= R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ 1913.}$$

빛도 보어가 원자 모델을 제시 한다.



빛도 바위의 그늘지 각설이
두도 윤자글을 서로 맞는다.

수포 원자.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L = r p = m v r$$

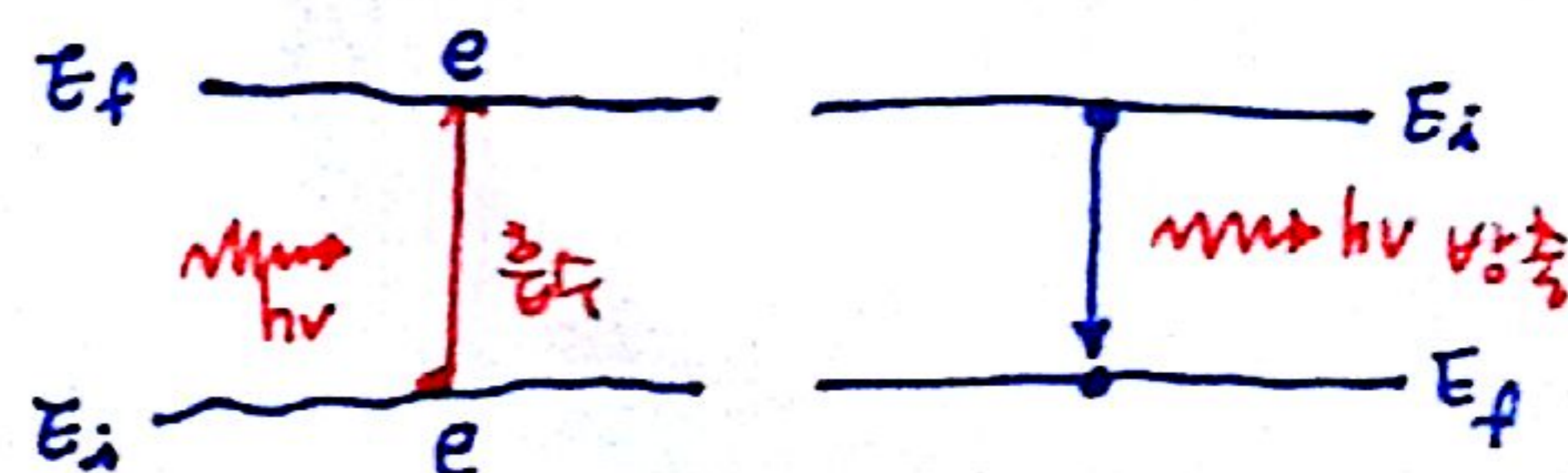
(각 운동량)

간전 뭉치

각 문장량이 양자화되어 있다.

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{h} \approx \frac{1}{2\pi} \approx \frac{1}{2\pi} \approx \frac{1}{2\pi}$$

$$\bar{E} = h\nu \rightarrow E_i - E_f = h\nu$$



i = initial f = final

전자가 photon을 흡수하고 방출한다.



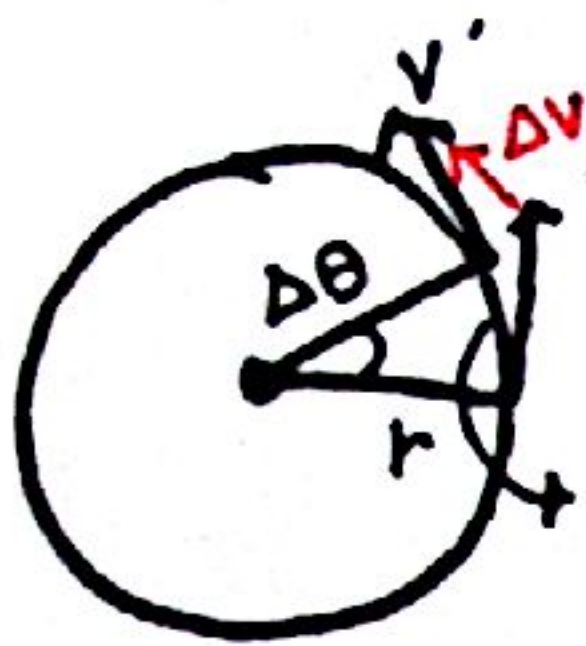
H (42)

정확하게
알고 있다.

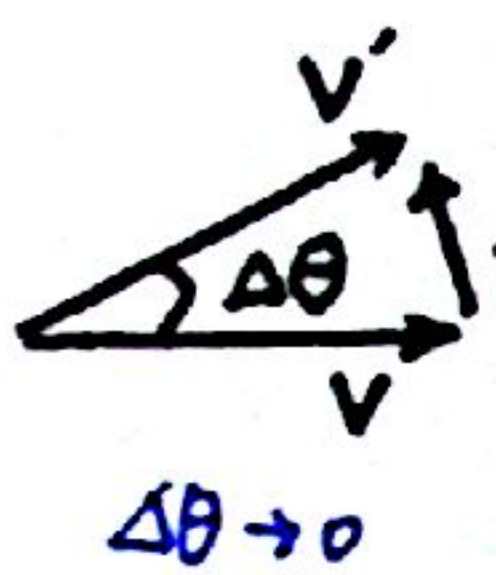
$$\frac{ke^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r} = \boxed{ke^2 = mv^2 r}$$

$$r = \frac{ke^2}{mv^2}$$

$$\vec{F} = m \vec{a}$$



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v \Delta \theta}{\frac{r \Delta \theta}{v}} = \frac{v^2}{r}$$



$$\sin(\Delta \theta) = \frac{\Delta v}{v}$$

$$\Delta \theta = \frac{\Delta v}{v}$$

(대략히 세라)
"미소각도"

$$\Delta v = v \Delta \theta$$

$$L = r p = m v r = \hbar$$

$$v = \frac{\hbar}{m r}$$

$$r = \frac{ke^2}{mv^2} = \frac{ke^2}{m \left(\frac{\hbar}{m r} \right)^2}$$

$$r = \frac{ke^2 m \hbar^2}{\hbar^2}$$

$$\boxed{\hbar = 6.58 \times 10^{-16} \text{ ev} \cdot \text{sec}}$$

$$r = \frac{\hbar^2 n^2}{ke^2 m} = \left(\frac{\hbar^2}{ke^2 m} \right) n^2$$

$$= (0.53 \text{ \AA}) n^2$$

$$\boxed{r = a_0 n^2}$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{ke^2}{r}$$

방향성이 반대되므로 (-) 이다.

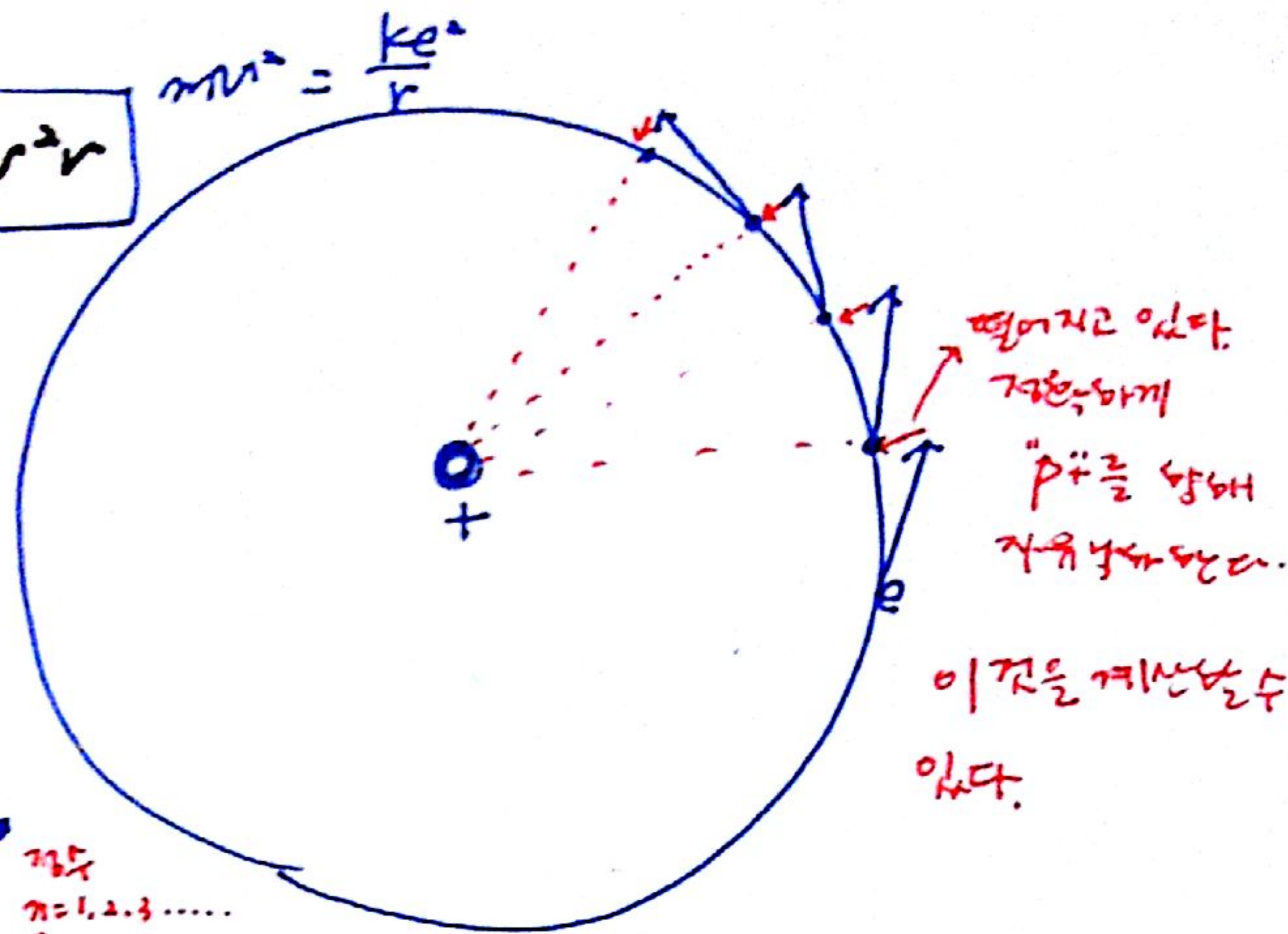
$$= \frac{ke^2}{2r} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{ke^2}{2r}$$

$$= \frac{-ke^2}{2(a_0 n^2)} = \frac{-ke^2}{2a_0} \frac{1}{n^2}$$

$$= (-13.6 \text{ ev}) \frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{E_n = \frac{-13.6 \text{ ev}}{n^2} = \frac{E_R}{n^2}}$$

보통 광학.



평면이라고 있다.
정확하게
"P"를 생각해
자주 생각해 본다.

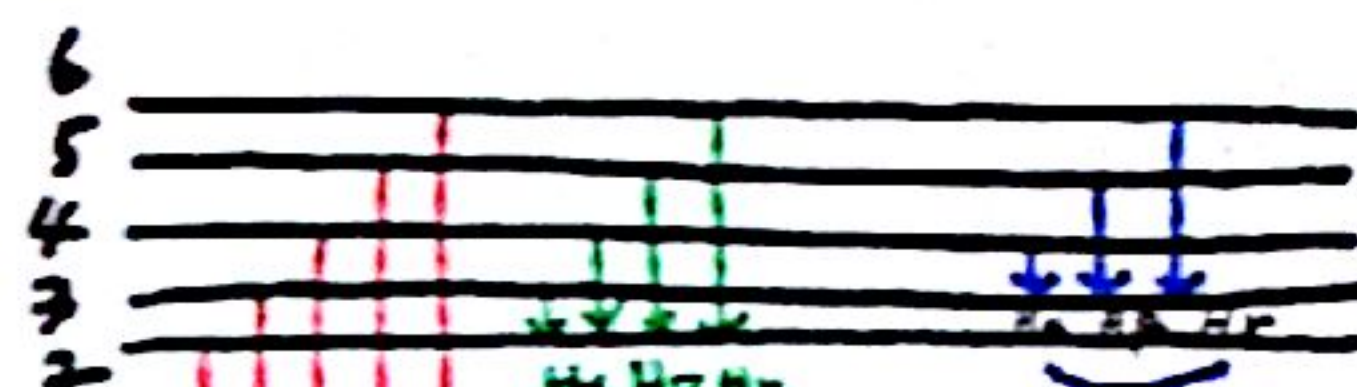
이것을 계산할 수
있다.

두 원자의 크기를 구한다.

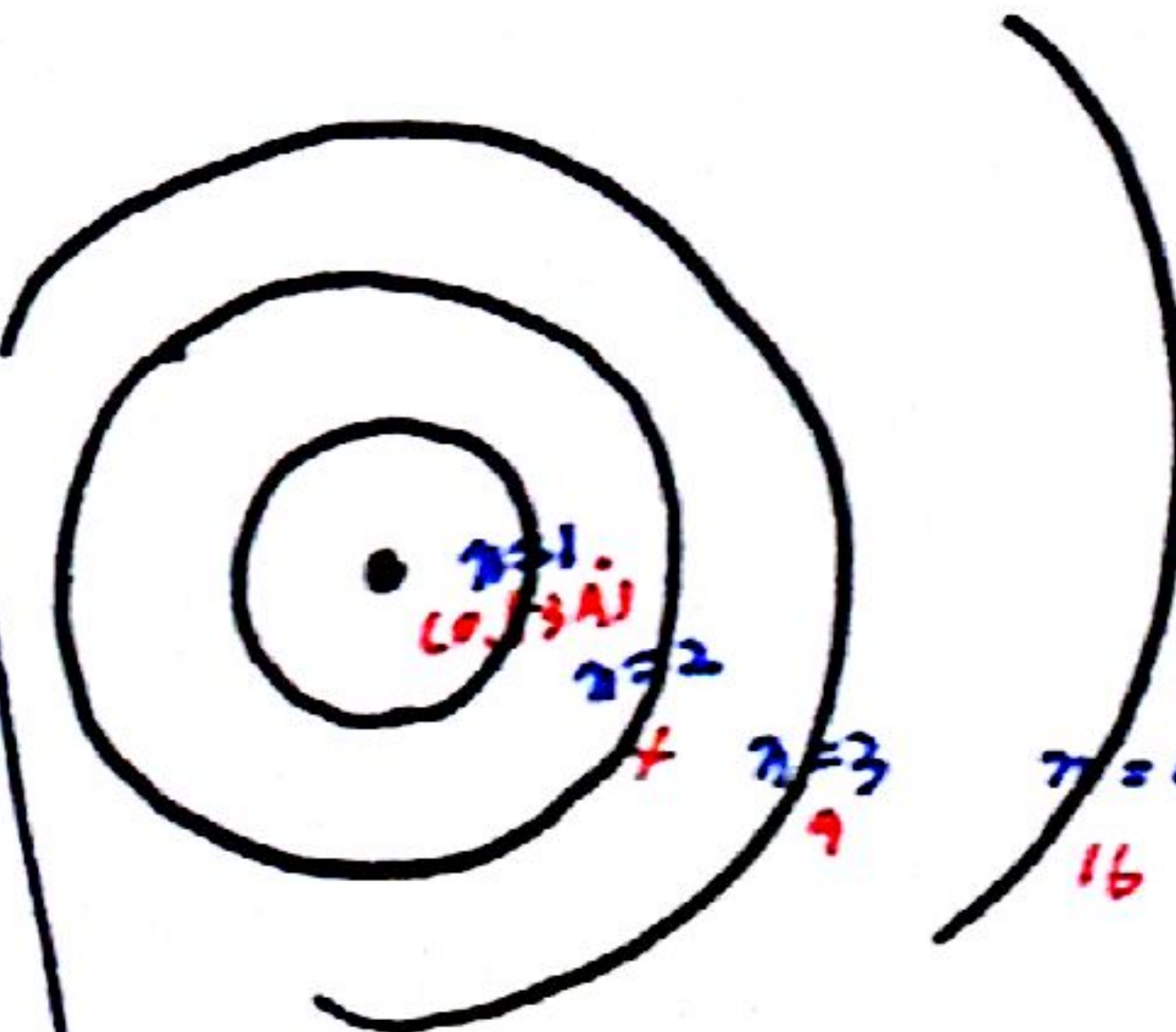
정확
n=1,2,3.....

"양자의 속도는 속도가 정해져
있는 세계이다."

양자가 정해져 있는 것이 가장 중요.



Lyman 계열
= 자외선
1층으로 떨어질 때



1924. 더 브로이
양자론은 빛의 파장이라고 되어 있다.

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h/2\pi}{\lambda/2\pi} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

$$c = \lambda \nu \quad \nu = \frac{c}{\lambda} \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{c} \cdot \frac{c}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$$

$$E = pc \quad \boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

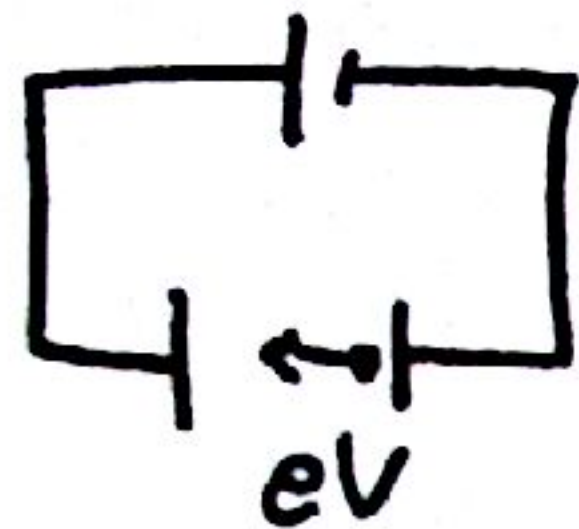
$$p^2 c^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \rightarrow m=0$$

단 한 번만 ππ
질량이 "0". 빛의 질량을
"0"으로

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = eV \rightarrow V = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2eV}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{150}{V_{\text{olt}}}} \times 10^{-10} \text{ m} = 10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}$$



전자 현미경

$$E_n = -\frac{Z^2 E_r}{n^2} = -\frac{(30)^2 \times 13.6 \text{ eV}}{1} = 12 \text{ keV}$$

현미경은 빛으로 본다. 3000 ~ 7000 \AA 정도는 본다.

대략 5000 \AA 정도만 볼 수 있다. 그러나 더 작은 \AA를 보려면 가속된 전자가 필요하다.

그것이 전자현미경이다.

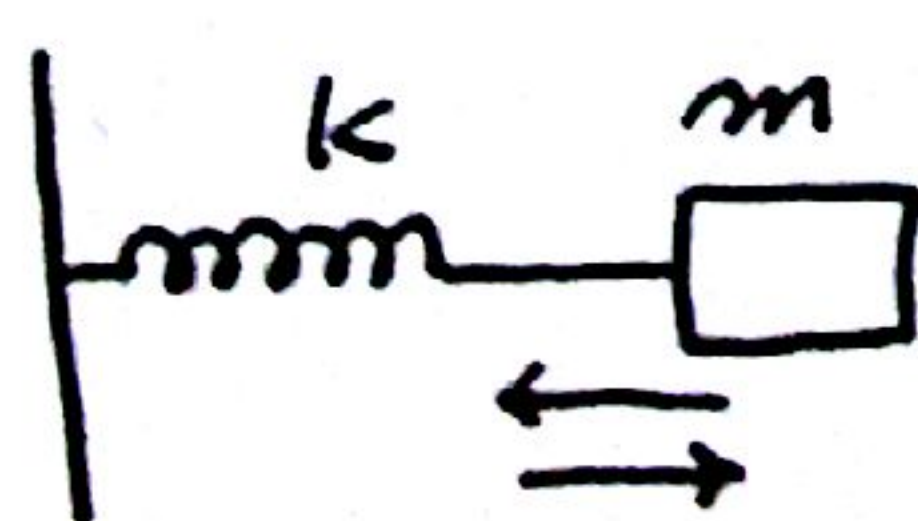
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

$$H \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad P \rightarrow i\hbar \nabla$$

$$H\psi = E\psi$$

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0$$

슈뢰딩거 eq.
 좌변은 potential Energy를 하나 H이다.



$$\vec{F} = -kx$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow k = m\omega^2$$

$$V = \int \vec{F} dx = \frac{1}{2} kx^2$$

$$E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{p^2}{2m}$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} p$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} p$$

$$aa^\dagger = \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + \frac{p^2}{2\hbar m\omega} - \frac{i}{2\hbar} [x, p]$$

$$= \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + \frac{p^2}{2\hbar m\omega} + \frac{1}{2}$$

$$[x, p_x] f(p) = [i\hbar \frac{\partial}{\partial p}, p_x] f(p)$$

$$= i\hbar \frac{\partial}{\partial p} (p_x f(p)) - p_x i\hbar \frac{\partial}{\partial p} f(p)$$

$$= i\hbar \frac{\partial p}{\partial p} \cdot f(p) + p_x i\hbar \frac{\partial f(p)}{\partial p} - p_x i\hbar \frac{\partial f(p)}{\partial p}$$

$$[x, p] = i\hbar I$$

$$a^\dagger a = \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + \frac{p^2}{2\hbar m\omega} - \frac{1}{2}$$

$$aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad [a, a^\dagger] = 1 \rightarrow \text{fermion}$$

$$aa^\dagger = 1 + a^\dagger a \quad \{b, b^\dagger\} = 1 \text{ boson}$$

$$aa^\dagger + a^\dagger a = \frac{m\omega}{\hbar} x^2 + \frac{p^2}{\hbar m\omega} = \frac{2H}{\hbar\omega}$$

$$\frac{2H}{\hbar\omega} = \frac{m\omega x^2}{\hbar} + \frac{p^2}{\hbar m\omega} = aa^\dagger + a^\dagger a$$

$$H = \frac{1}{2} \hbar \omega (aa^\dagger + a^\dagger a)$$

$$= \frac{1}{2} \hbar \omega (1 + 2a^\dagger a)$$

$$= \hbar \omega (a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

$$= \hbar \omega (N + \frac{1}{2})$$

$$H = \hbar \omega (N + \frac{1}{2})$$

$$\hookrightarrow N=0 \rightarrow H = \frac{\hbar \omega}{2}$$

$$a + a^\dagger = 2 \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x$$

$$a - a^\dagger = 2 \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} p = i \sqrt{\frac{2}{\hbar m\omega}} p$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \quad p = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a - a^\dagger)$$

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (a^2 + aa^\dagger + a^\dagger a + a^{\dagger 2})$$

$$p^2 = -\frac{\hbar m\omega}{2} (a^2 - aa^\dagger - a^\dagger a + a^{\dagger 2})$$

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad \begin{matrix} \langle 1 \rangle \\ \text{브라} \quad \text{켓} \end{matrix}$$

$$(\Delta x)^2 = \langle n | x^2 | n \rangle - \langle n | x | n \rangle^2$$

$$\langle n | x | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle n | (a + a^\dagger) | n \rangle$$

$$\hookrightarrow a | n \rangle = \sqrt{n} | n-1 \rangle$$

내림 연산자
입자를 소멸시킨다.

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\langle n | a | n \rangle + \langle n | a^\dagger | n \rangle) = 0$$

$$\langle n | p | n \rangle = 0$$

$$a^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1} | n+1 \rangle$$

$$N | n \rangle = n | n \rangle$$

operator
양자역학
고유값
전체 고정

1. 일가·연속 함수, 계급 적분

$$x^2 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx = \infty$$

파동함수의 넓이 무한하다.
태우려면 한정된 값이 나와야 한다.
무한대로 자연의 현상이 아니다.

2. 완전성, 독립성

$$\langle \psi_m | \psi_m \rangle = \delta_{mm}$$

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + \dots = 1$$

이런 식으로 해야 한다.

3. 선형 공간, 중첩

중첩이며 비국소적이거나
설명이 가능하다.

자연은 descript 하다.

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2m\omega} \langle n | a^2 + 1 + 2a^\dagger a + a^{\dagger 2} | n \rangle$$

$$= \langle n | a^2 | n \rangle + \langle n | 1 | n \rangle + 2 \langle n | a^\dagger a | n \rangle$$

$$\hookrightarrow \langle n | n \rangle \quad \hookrightarrow N$$

$$+ \langle n | a^{\dagger 2} | n \rangle = 1$$

$$\hookrightarrow \begin{matrix} n+1 \\ n+2 \end{matrix}$$

$$= 1 + 2 \langle n | N | n \rangle = 1 + 2 \langle n | n | n \rangle$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m\omega} (1 + 2n)$$

$$\langle p^2 \rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2} \langle n | a^2 - 1 - 2a^\dagger a + a^{\dagger 2} | n \rangle$$

$$= -\frac{\hbar m\omega}{2} (\langle n | -1 | n \rangle - 2 \langle n | N | n \rangle)$$

$$= -\frac{\hbar m\omega}{2} (-1 - 2n) = \frac{\hbar m\omega}{2} (1 + 2n)$$

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 0$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} (1 + 2n) = \frac{\hbar}{m\omega} (n + \frac{1}{2})$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = 0$$

$$= \hbar m\omega (n + \frac{1}{2})$$

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 = \hbar^2 (n + \frac{1}{2})^2$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = (n + \frac{1}{2}) \hbar$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2}$$

하이젠버그 불확정 eq.

$$(\Delta t)(\Delta E) \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\hbar = 6.58 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{sec}$$

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0$$

슈뢰딩거 eq.

$$V=0$$

$$\nabla^2 \psi + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0$$

$$\psi = e^{i(kx \pm \omega t)}$$

3차원 지어질때에 존재하는 두 있다.

$$V(r) = \frac{-ke^2}{r}$$

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) H(\theta) \Phi(\phi)$$

$$L_z \Phi(\phi) = m_l \hbar \Phi$$

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

magnetic Quantum Number

$$Y(\theta, \phi)$$

$$L_z Y(\theta, \phi) = m_l \hbar Y$$

$$L^2 Y(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y(\theta, \phi)$$

$l \Rightarrow$ 주양자
각운동 Q.N

$$E_n = \frac{E_F}{n^2}$$

광양자 빛과 광자 $h\nu$ 로 되어 있다.

빛은 양자화되어 있다.

빛이 비어 - 디랙의 비만을 알게됨

전자와 양자가 어떻게 빛이 있는지

정리

슈뢰딩거. 파동은 해를 가지고 있다

양자역학은 Hilbert 공간에서 이루어진다

↓

양자역학

계량

의 계량

양자역학

→ Hilbert Vector 공간.

