원운동 → 뉴턴 → 만유 인력 → 포아송 → 중력장 방정식
3법칙
→ 비리알 → 진즈 M_J
질량

제 7회 137억년 우주 진화

5강

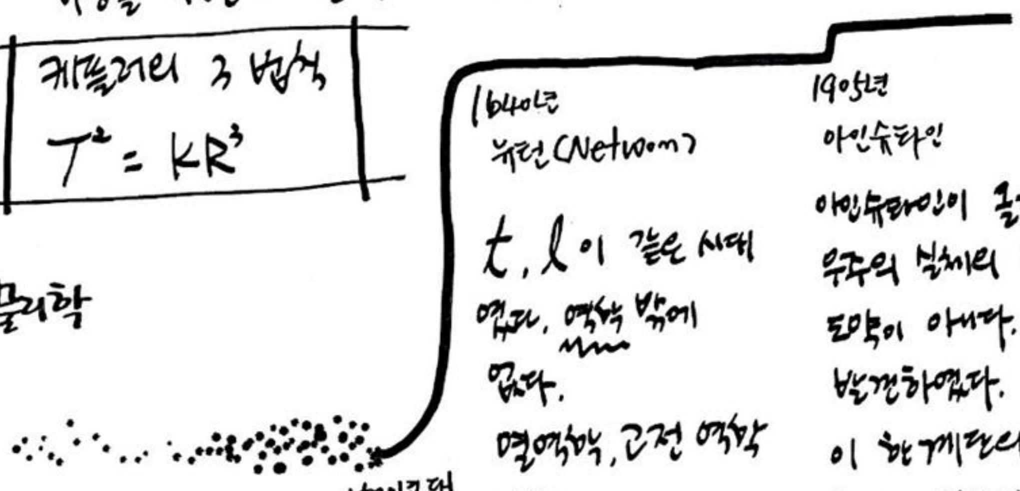
물리학이란 학문이 얼마나 된 학문인가?

지구상에 '짠' 하고 등장한 시기가 있다. 양자역학은 1920년대에 등장했다. 분자 생물학은 1960년대다. 그 전에 DNA라는 용어가 있었는가. 아니다. 물리학은 1600 대다. 티코 브라헤, 케플러에 의해 1500년대 시작됐다. 천체 망원경 1600년대에 네덜란드 왕실에 근무하며 육안으로 별을 관찰했다. 행성을 관찰했다. 20년 동안 궤도를 관측했다. 별자리를 바탕으로 관측한다. 티코 브라헤의 조수인 케플러가 20년 동안의 티코 브라헤의 관측 내용을 기반으로 통계화 작업을 한다. 이 때부터 물리학이 태동한다.

케플러의 3법칙

$$T^2 = KR^3$$

물리학



1500년대

1640년
뉴턴(Netwon)

t, l 이 같은 시대였다. 역학 밖에 없다.
열역학, 고전 역학
.....
↳ 이것을 바탕으로 원자에 역학을 적용한 결과이다.

1905년
아인슈타인

아인슈타인이 올라간 한 계단은 우주의 실체에 근접한다. 작은 도약이 아니다. 4차원 시공을 발견하였다.
이 한 계단의 +α가 시공의 해석을 다르게 한다.
t, l 이 t↑, l↓ 으로 변수가 있다를 발견한다.
시간과 공간이 같지 않다는 사실의 발견이다.

물리
과학사에는 뉴턴과 아인슈타인 밖에 없다.

↳ 물리학은 뉴턴이 만든 학문이라고 해도 과언이 아니다.

뉴턴 3법칙

1. 관성 $\overset{\text{운동량}}{p} = mv$

2. 가속도 $F = ma = \dfrac{dp}{dt}$

3. 작용 반작용 $F_{12} = F_{21}$

특수 상대성 이론

$$l = l_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$E = mc^2$$

달까지 가는데는 $F = ma$면 된다. 물리학 공식에서 가장 많은 것이 질량과 모멘텀이다. 공식을 적으면 빈번하게 등장하는게 k이다. $p = \hbar k$,

물리학은 모멘텀 공간에서 일어나는 현상이다.

뉴턴은 공간과 시간을 건드리지 않았다.

↳ 우주론에서 가장 많이 등장

k = 모멘텀이다.

"질량이 있으면 모든 공간은 휘어진다"

$$F = \frac{GMm}{r^2} \qquad \frac{du^\mu}{ds} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \qquad R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$$

공간 시공간의 2개 미분 (곡률) 물질 에너지 텐서

"뉴턴의 사과"에서 물리학이 생겼다고 해도 90% 맞다. 뉴턴은 '우'운동에 생각을 몰아 갔다. 아인슈타인은 빛으로 달리는 세계는 어떤 것일까에 모든 생각을 극단으로 몰았다.

태양 - 지구가 서로 당기는 힘이 같다. 지구와 사과가 당기는 힘이 같다. 이 현상을 일반 법칙과 같다고 할 수 없다. 뉴턴의 천재성은 극단적 상황으로 옮기면서 위대성을 발휘했다. $F_{12} = -F_{21}$로 극단화 했다.

"두 물체는 무조건 당긴다"

사과의 길이가 지구 반지름에 비해서 작기 때문에 무시한다.

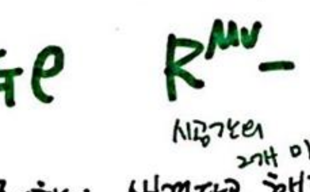
같은 법칙 ; 만유인력이 작용한다.

Netwon의 관찰은 달이 왜 떨어지지 않는가 였다.

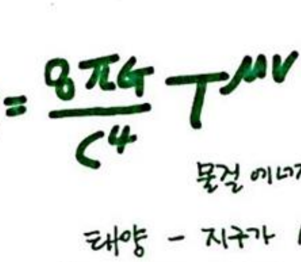
$F = 4\pi^2 k_s \frac{m}{r^2}$

=

$F = 4\pi^2 k_e \frac{m}{r_m}$



=



$F = 4\pi^2 k_e \frac{m}{r_e^2}$

$a_{사과} = 4\pi^2 k_e \frac{1}{r_e^2}$ → 지구

$a_{달} = 4\pi^2 k_e \frac{1}{r_m^2}$ → 달

$$\frac{a_{달}}{a_{사과}} = \left(\frac{r_e}{r_m}\right)^2 = \left(\frac{1}{60}\right)^2$$

$$a_{달} = \frac{4\pi^2 r}{T^2_{(\text{달 주기})}} = \frac{4\pi^2(3.8\times10^8 m)}{(27.3\ day)^2} = 2.7\times10^{-3} m/sec^2$$

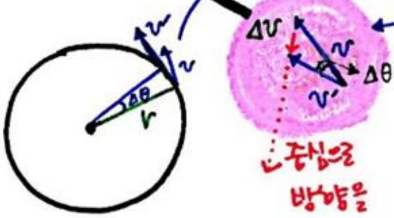
$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

$$a_{달} = g\left(\frac{1}{60}\right)^2 = 9.8 m/sec^2\left(\frac{1}{60}\right)^2 = 2.7\times10^{-3} m/sec^2$$

"물리학의 전부인 그림이다."

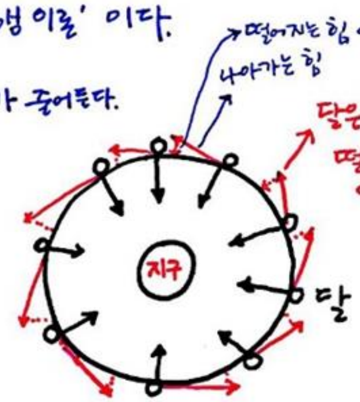
일반상대성 이론은 '평행 이론' 이다.

벡타를 평행이동 하면 v'의 길이가 줄어든다.



$\vec{v} + \Delta\vec{v} = v'$

$v' - v = \Delta v$

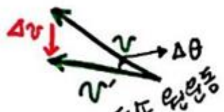


달은 계속 떨어지고 있다.

$KT^2 = r^3$

$T^2 = \frac{r^3}{K}$

인력은 지구로 작용한다.



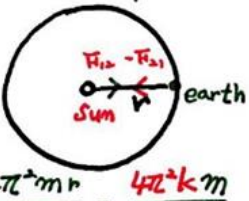
$$\Delta v = v\Delta\theta = v\Delta(\omega t) = v\omega\Delta t$$

(각속도, 시간)

가속도

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v\omega = v\frac{2\pi}{T} = v\frac{2\pi}{\frac{2\pi r}{v}} = \frac{v^2}{r}$$

$$F = ma = m\frac{v^2}{r} = m\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = m\frac{4\pi^2 r}{T^2}$$



$$F = 4\pi^2 k\frac{m}{r^2}$$

$$F = \frac{4\pi^2 m r}{\left(\frac{r^3}{k}\right)} = \frac{4\pi^2 k m}{r^2}$$

지구

$$4\pi^2 k_e = G m_e$$

비례 상수

무게가 작용(지구)

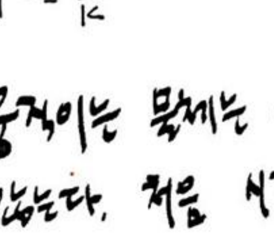
$$4\pi^2 k_s = G m_s$$

$$4\pi^2 k_e \frac{m_s}{r^2} = G\frac{m_e m_s}{r^2}$$ → 지구가 느끼는 (태양이 당기는 힘)

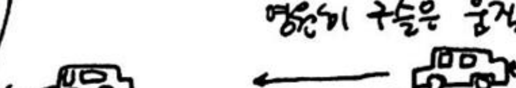
$$4\pi k_s \frac{m_e}{r^2} = G\frac{m_s m_e}{r^2}$$ → 태양이 느끼는 힘 (지구가 당기는 힘)

태양이 지구가 당기는 힘과 지구가 태양을 당기는 힘이 같다는 걸 증명한다. 그 후 태양을 달로 치환해도 같은 법칙이 있다는 걸 알았다. 뉴턴이 천재인 이유는 둥 정원의 사과가 지구로 떨어지는 것도 같은 법칙인 걸 알았다.

움직이는 물체는 에너지가 들지 않는다. 처음 시작된 작용을 만든 힘과 방향을 바꿀 때만 에너지가 든다. 우주의 모든 물체는 무언가를 바꿀 때만 에너지가 든다. 가속도는 에너지가 든다.



→ 밑의 면이 마찰 계수 0 이라면 영원히 구슬은 움직인다.

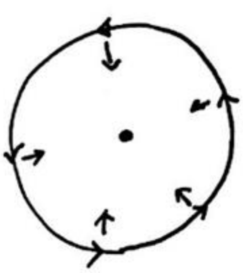


마찰계수 '0' 일때

누군가 한 번 밀어주면 영원히 자동차는 움직인다.

우주는 대부분 등속도 운동이다.

우주 공간에 우주선에서 떨어진 우주인은 영원히 떨어진 방향으로 날아간다. 영원히!



원 운동은 가속도 운동이다. 계속 밖으로 나갔다 다시 떨어지는 움직임을 한다.

원 운동은 지속적으로 force가 작용해야 한다.

이 운동은 방향을 바꾸는 운동으로 에너지가 작용한다.

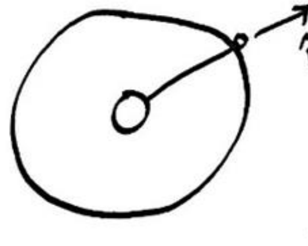
포텐셜 에너지

$$U = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$F = ma \quad a = \frac{F}{m} \quad g = -\frac{Gm}{r^2}$ 가속도(중력 가속도)

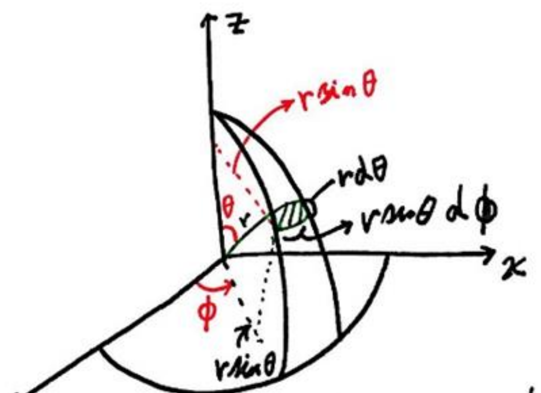
$$\int \vec{g} \cdot d\vec{a} = \int_v \nabla \cdot \vec{g} \, dv$$

발산 법칙(가우스 법칙)



$\hat{r}$ 이다. 그러나 중심 방향으로 $\hat{r}$이 작용하기 때문에 $-\hat{r}$이다.

고무 풍선에 들어 찬 물의 양은 밖으로 뿜어진 물의 양과 같다.



물리학은

r, θ, ϕ 의 학문이다.

$$d\vec{a} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}$$

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{a} = -GM \int \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}$$

360°와 180°(π) 까지만 계산 서로 겹치기 때문

$$= -GM \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta}_{-\cos\theta \big|_0^{\pi} = (-1-1) = 2}$$

$$= -4\pi GM$$

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{a} = -4\pi GM = -4\pi G \int_v \rho \, dv$$

$$= \int_v \nabla \cdot \vec{g} \, dv$$

공간의 2번 미분 = 물질

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$$

포아송 방정식

$-4\pi G = \underbrace{\nabla \cdot \vec{g}}_{g \text{ 벡터의 발산}} \qquad \vec{g} = -\nabla \phi$ 위치 에너지 미분 ($U = \phi$)

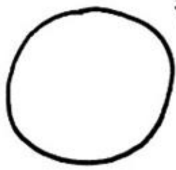
$$\nabla \cdot (-\nabla \phi) = -4\pi G \rho$$

$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$ (라플라시안)

공간의 2번 미분 물질 포아송 방정식 (중력자 방정식의 뉴턴 버전)

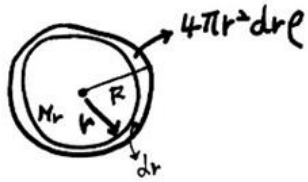
태양 크기의 100배 정도까지만 별이 커진다. 복사에너지 양이 커지면서 별이 커질 수 없다.

진스 질량 10^{16} 에서는 복사에너지가 커서 입자를 모을 수 없었다. 10^{6} 정도에 조금씩 모을 수 있었고, 10^{2} 정도일 때 서로 모여서 별이 될 수 있었다.



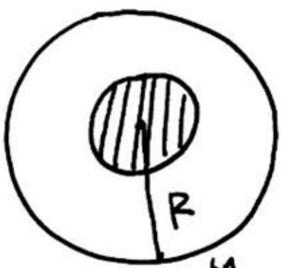
하나의 행성이나 천체에 만유인력 법칙이 적용할 수 있는가?
이 때는 한 천체를 외·내로 구해 지으면 가능하다.

"만유인력의 법칙은 질량이 있는 모든 것에 적용할 수 있다."



M

$$dF = \frac{GM_r 4\pi r^2 dr\rho}{r^2}$$



$\frac{GM^2}{R}$ 한 천체가 갖는 중력의 양의 관계가 된다.

$$U = 4\pi G\int M_r \rho r dr$$

$$\rho \sim \bar{\rho} \qquad F = 4\pi G\int \frac{4\pi r^3}{3}\bar{\rho}\bar{\rho} r dr$$

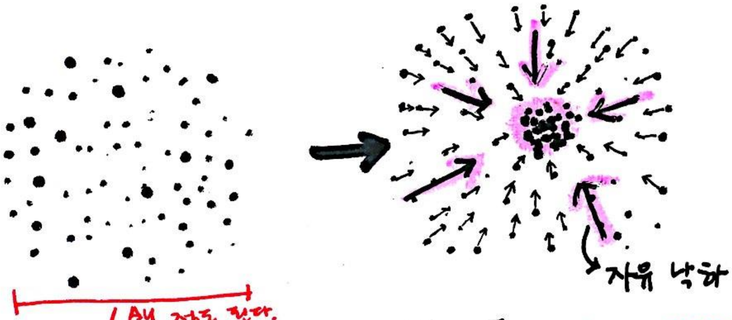
$$M = \frac{4\pi}{3}R^3\bar{\rho} \qquad = \frac{16\pi^2 G}{3}\bar{\rho}^2\int_0^R r^4 dr$$

$$\to \frac{1}{5}r^5\Big|_0^R = \frac{R^5}{5}$$

$$= \frac{16\pi^2 G}{5}\bar{\rho}^2 R^5$$

$$U = \frac{16\pi^2 G}{15}\left(\frac{3M}{4\pi R^3}\right)^2 R^5 = \frac{-3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

중력의 위치에너지



티끌이 모여 별이 된다. <21,000 만 년 걸린다>

결국 한 천체에서 내부와 외부의 만유 인력 법칙이 적용되는 것과 같이 입자가 모여 별이 되었다.

$2K + U = 0$

비리알 정리

$2K < |U|$

별이 형성되는 조건

$K = \frac{1}{2}U = \frac{3}{10}\frac{GM^2}{R}$

별이 된 상태

$\Delta E = -(E_f - E_i) = -E_f$

$\Delta E = \frac{3}{10}\frac{GM_\odot^2}{R_\odot} = 1.1\times 10^{41} J$

태양을 표기할 때 ⊙

과학은

전우의 시체를 넘고 넘어!

설명할 수 없으면 물러 난다. 질질 짜지 않는다. 과학은 사체 덩어리다. 수 많은 법칙과 이론의 반증이 나오는 순간 사장되었다. 깔끔히 물러서면서 지금의 일으켰다. 과학도 언젠가 틀려질지가 아니다. 정확히 그러하고 있다. 이다.

왜 이리 과학이 잘 맞지?

맞아 들을 수 밖에 없는 이유는 만유인력이 견고하기 때문이다.

철학과 종교가 인류가 가지고 있는 질문에 얼마나 답을 했는가?

뉴턴의 관찰은 왜 달은 지구로 떨어지지 않는가를 생각했다.

동역학적 지구 나이

$t_{KH} = \frac{\Delta E}{L_\odot} \approx 10^7$ years

$T^2 = KR^3$는 티코 브라헤의 20년 동안 관측한 결과를 케플러가 통계로 나온 법칙이다. 여기에 대해 뉴턴은 원운동을 통한 공식을 만들어 냈다. 그리고 그 법칙 통해 유도한 값이 케플러의 법칙과 일치를 이루었다. 그리고 우주의 천체부터 사과에 이르기 까지 적용 가능한 공식이 탄생한다.

왜 이렇게 과학이 잘 맞느냐를 증명한다.

우주에 적용되는 법칙이기 때문이며 그 법칙은 자연이 증명하기에 그러하다.

$\vec{x} = (ct, x)$

$\sqrt{\vec{x},\vec{x}} = \sqrt{(ct)^2 - x^2}$

$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \left(\frac{dct}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}\right) = \left(c\underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{\gamma}, \frac{dt}{d\tau}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v}\right)$

$= (c\gamma, v\gamma)$

$\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{(c\gamma)^2 - (v\gamma)^2} = \gamma\sqrt{c^2 - v^2}$

$= \gamma c\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \gamma \cdot \frac{1}{\gamma} c = c$

$\vec{p} = m_0 U = (c m_0 \gamma, v m_0 \gamma)$

$= (mc, mv) = \left(\frac{mc^2}{c}, mv\right)$

$= \left(\frac{E}{c}, p\right)$

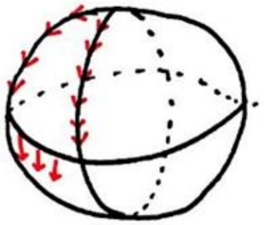
$\sqrt{\vec{p}\cdot\vec{p}} = \sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2}$

$\vec{p}\cdot\vec{p} = m_0\vec{u}\cdot m_0\vec{u} = m_0^2\,\vec{u}\cdot\vec{u} = m_0^2 c^2$

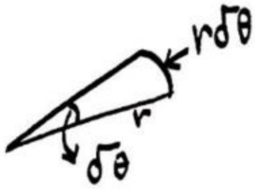
$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2 \quad E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$

모든 학문은 언어학이다.
"기호만 또박 또박 적으면
된다." 물리학은
속도와 운동량 밖에 없다.
아인슈타인은 force가 없다.
시공이 율동하기 때문에
곡률에 따라 그 길을
갈 뿐이다. 우주는 곡률의
율동할 뿐이다. 모든 입자는
곡률에 의해 생긴 그 길을 갈
뿐이다.

휘어진 시공인
곡률에 입자가 지날 뿐이다.

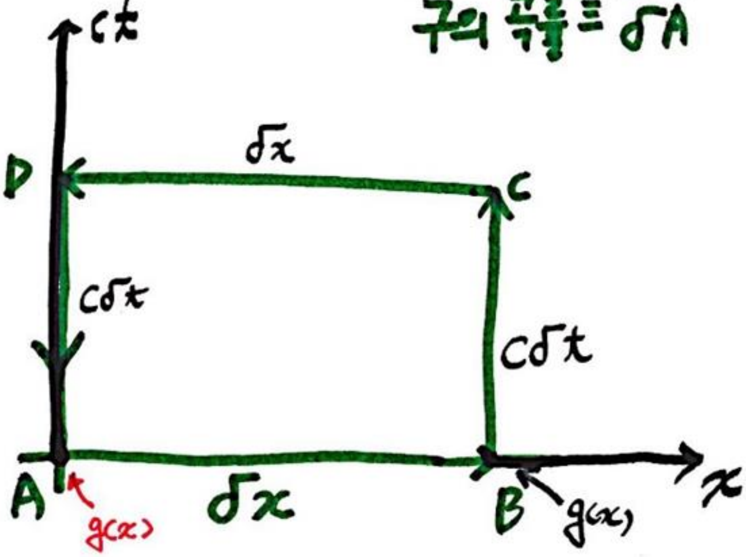


$$\text{구의 곡률} = \frac{\frac{\pi}{2}}{4\pi R^2 \times \frac{1}{8}} = \frac{1}{R^2}$$



$$\text{원호곡률} = \frac{\delta\theta}{\delta x} = \frac{\delta\theta}{r\delta\theta} = \frac{1}{r}$$

$$\text{구의 곡률} \equiv \frac{\delta\theta}{\delta A}$$



A→B $t=0$

B→C → $\delta v_1 = g(x+\delta x)\delta t$

C→D $t=0$

D→A → $\delta v_2 = g(x)(-\delta t)$

$$\delta v = \delta v_1 + \delta v_2 = [g(x+\delta x) - g(x)]\delta t \qquad \lim_{\delta x \to 0} \frac{g(x+\delta x) - g(x)}{\delta(x)} = \frac{dg(x)}{dx}$$

$$= \frac{dg(x)}{dx}\delta x \delta t = \frac{d}{dx}\left(\frac{-GM}{x^2}\right)\delta x \delta t = \frac{2GM}{x^3}\delta x \delta t$$

$$\delta\theta = \frac{\delta v}{c} = \frac{2GM}{cx^3}\delta x \delta t \qquad \text{지구 시공곡률} = \frac{\delta\theta}{\delta A} = \frac{\frac{2GM}{cx^3}\delta x \delta t}{\delta x \cdot c\delta t} = \frac{2GM}{cx^3} = \frac{1}{R^2}$$

$$R = \sqrt{\frac{c^2 x^3}{2GM}} = \sqrt{\frac{c^2 x}{2\frac{GM}{x^2}}} = \sqrt{\frac{c^2 x}{2g}} = \sqrt{\frac{(3\times10^8)^2\, 6.4\times10^6}{2\times9.8\,m/sec^2}}$$

$$= 1.7\times10^{11}\,m = 27,000\,R_{earth}$$

"과학은 감각이 끝나는 곳에서 시작된다." 지구에 의한 곡률은 27,000배(지구 반지름) 떨어진 곳에 생긴다. 인간이 가진 감각은 시간의 곡률은 느낄 수 없다.

5강의 핵심은 Netwon을 만나게 하고 싶었다.
Science는 역학이다. 양자 역학이라 해야 한다.
천상의 법칙이 지상의 법칙과 같다.는 것의 발견이다.

박자씨의 문화 운동
"공식은 기호의 조합이며 기호에 익숙해 지는 방법을 선택한다.
기호의 제국을 통해 자연을 알고자 한다.
모든 학문은 언어학이다. 학문을 깊이 들어가면 엄밀한 정밀도와 만난다. 기호를 쓰는 것도 $H, \emptyset$ 가 아니라 H, Φ 똑바로 써야 한다."