제9회 137 우주의 진화
2017. 7. 23

# 제 11강. 열역학에서 우주론까지

[ 2015 Higgs
2016 CMB (25hr) : 우주론 핵심의 80%.

2017. 물리학을 어떻게 이해할 것인가?

## [ 자연과학 5대 공식 ]

· $F = ma$ → 4차원 version $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$ — Newton

$H\psi = E\psi$

wave
· $E = h\nu$ — Einstein
플랑크 상수, 주파수

입자
· $\lambda = \frac{h}{p}$ — 드브로이

양자역학

각운동량 → 양자화
· $L = n\hbar$ — 닐스보어 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$
(∵ 모든 것은 원운동이다)

· $dU = TdS - pdV + \mu dN$
$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$

"자연과학은 끝이 있다"
- 5대 공식으로 귀결된다

· $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$

· 모든 물리학의 시작은 "F=ma"
; 고전역학
↓
· 양자역학
· photon. → wave
→ 입자
$E = h\nu$ (h: 양자의 세계로 진입)
$\lambda = \frac{h}{p}$
· 각 운동량이 양자화되어 있음 $L = n\hbar$
· 열역학은 고전역학, 양자역학과 약간 다른 분야
; state (상태)
집단적 현상을 설명하는 학문
가장 위대한 학문 by Einstein
→ "확률"과 연결됨

⇒ 자연과학은 '확률', '통계'를 기반으로 함

(eg) 의자 100, 사람 70
→ 의자에 사람이 앉는 모든 가능성,
경우의 수가 count 된다.

(eg) Big Data. 인공지능(AI)의 핵심은
이 모든 '확률'의 가능성을 계산할 수
있음

∴ "AI" ~ 열역학의 세계이다

**Force**

$y = fx^2 = \frac{1}{3}x^3 + C$

= 적분을 하면
→ 훨씬 더 큰 가능성이 생겨남

**Energy**

미분 ≪ 적분
훨씬 더 큰세상임

Force ≪ Energy
(Energy를 알면 Force는 금방 알수있다)

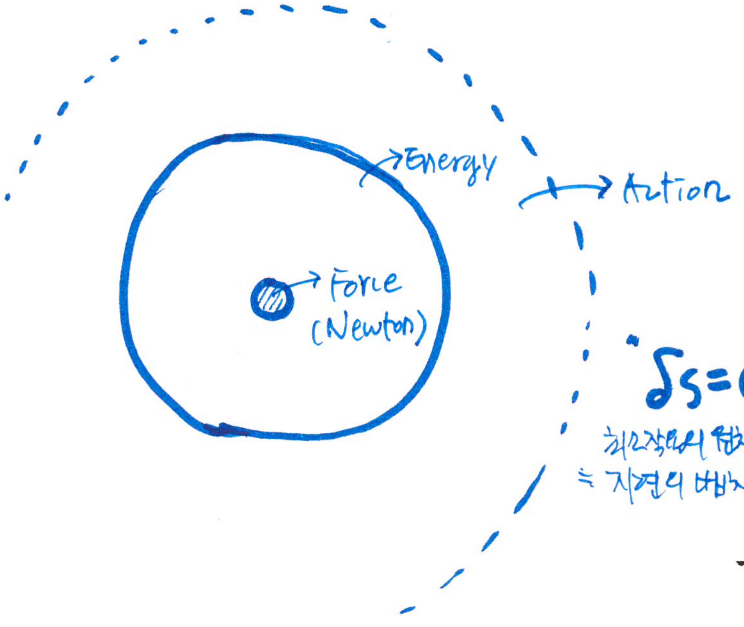
**Action**

$\text{Force} \rightarrow \text{Energy} \rightarrow \text{Action}$ (미분, 미분)

(∴) Action 부터 공부하면
Energy, force를 알 수 있다.

Action ≒ h planck상수

• Action = Energy × 시간
$h = 6.63 \times 10^{-34}$ J·sec




"$\delta S = 0$"
최소작용의 원칙
≒ 자연의 법칙

• 수 많은 '관찰' data
→ 끼워 맞춘 '법칙'

경우의 수에 대한 모든 헤아림

열역학 (엔트로피)
→ 절대적으로 엄밀한 과학분야이다.

경우의 수를 count 하는 방법

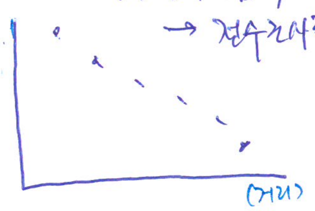
(∴) 깡그리 '전수 조사' 하겠다

관찰
↓
법칙
eg. 케플러 3법칙 (전수조사를 통해)
↓
(전수조사 어려우므로)
일반화시킬수 있는 법칙(원칙) 만들어냄

$\boxed{(\therefore)\ F = ma}$

Newton 부터 자연과학이 시작됨

(eg) 케플러의 법칙




→ 전수조사를 통해 통용되는 '법칙'을 만들어 냄
but. '왜' 그런지는 몰랐다.

⇓

Newton
: Force를 유도할 수 있을 것
Energy에 '주목' 했다. (산업혁명 이후)
「열」을 정리하기 시작함.

⇒ '**열역학**' **태동**

Energy를 다루고 있음.

$\text{Energy} \underset{\text{적분}}{\overset{\text{미분}}{\rightleftarrows}} \text{Force}$

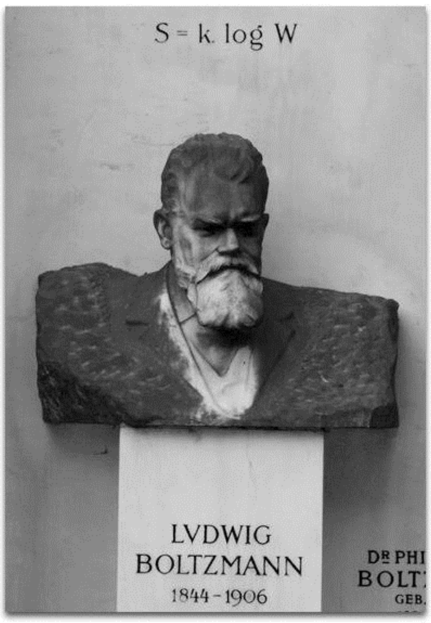
- 모든 입자들은 potential energy 가 '낮은' 곳에 위치할 확률이 더 높다.
  (~~> 더 안정적인 상태)

energy minimum 의 세상
→ 일반인들이 처하기 쉬운 상태
위대한 사람들이 적은 이유?
Energy 가 많이 들고
≒ 이런 가능성의 사람이 적기 때문

$\boxed{\text{상태의 수} \fallingdotseq \text{확률}}$

(가장어려운 상태)
절대온도 0 K entropy 0
열역학 제 4법칙
$S = k \ln \Omega \rightarrow 1$, $\Rightarrow 0$

⇒ '양자통계역학' 이 발달.
**CMB** cosmic microwave background




- 슈뢰딩거
  : 생명은 negative entropy 다
  → 생물학 시작의 근원이 됨

- Einstein $E = h\nu$ ← 주파수
  드브로이 $\lambda = \frac{h}{p}$ (λ: 파장)

" **h (planck상수) = Action!** "

(eg) 방안의 온도 300K
+ photon 알갱이 1개 add 되었을때 (1eV)
상태의 갯수 변화
⇒ $10^{16}$ 의 가짓수의 상태 가능성 증가
$\frac{1eV}{300} = \frac{1000\,meV}{26\,meV} = 39 \Rightarrow e^{39}$

(eg) 꽃밭. 화단에 Energy 입력되어 (photon으로 바뀐다)
꽃이 피었다
~~> 무한대에 가까운 '상태' 가 존재
∵ $10^{29}$ 의 입자

한 송이 꽃을 피우기 위해 전 지구적 현상이 link 되었다.
Boltzmann. Gibbs 등이 최초로 인지한 천재 과학자들...

$S = \log_e \Omega$ → 상태의 갯수
$S = k \ln \Omega$
k → Boltzmann 상수 (factor) Energy 세계

(∴) 모든 것은 '상태'로 설명할 수 있는 세상출현

$$U = Q - W$$

$$dU = T\underbrace{ds}_{\Delta Q} - p\,dV + \mu\,dN$$

$\Delta Q = 0$ (단열과정) $\Delta N = 0$

$U$ (내부에너지) $= E$

$$dE = -p\,dV$$

$$E = mc^2 = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho\, c^2$$

시간에 대해 부피 미분

ρ 바뀜

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$\dot{V} = \frac{4\pi}{3} \cdot 3r^2 \cdot \dot{r} \qquad \left(\dot{r} = \frac{dr}{dt}\right)$$

$$dE + p\,dV = 0$$

(r, ρ에 대해 각각 미분)

$$\frac{4\pi}{3} \cdot 3r^2 \cdot \dot{r}\, \rho c^2 + \frac{4\pi}{3} r^3 \dot{\rho}\, c^2 + p\,\frac{4\pi}{3} \cdot 3r^2 \cdot \dot{r} = 0$$

($\frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot c^2$ 으로 나눔)

$$3\frac{\dot{r}}{r}\rho + \dot{\rho} + p \cdot 3\frac{\dot{r}}{rc^2} = 0$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{r}}{r}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \qquad \leftarrow w\rho c^2$$

(5 page 설명 참조)

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{r}}{r}(\rho + w\rho) = 0$$

(미분)

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{r}}{r}\rho(1+w) = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\frac{\dot{r}}{r}\rho(1+w)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{r}}{r}dt$$

$$\int\frac{d\rho}{\rho} = -3(1+w)\int\frac{\dot{r}}{r}dt$$

유체방정식

$$\ln\rho = -3(1+w)\ln r + c$$
$$= c\ln r^{-3(1+w)}$$

$$\rho = \rho_0 R^{-3(1+w)}$$

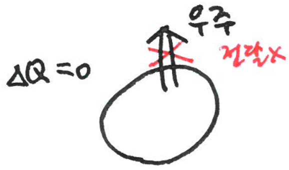
MDU $w=0$ $\quad \rho = \rho_0 R^{-3}$

RDU $w = \frac{1}{3}$ $\quad \rho = \rho_0 R^{-4}$

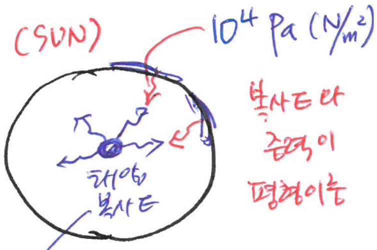
(5page 중간으로 이동)

- $U$ (내부에너지) $\doteqdot E$


- 열역학 → 우주론으로 직결된다




- "구" 부피 : $\frac{4}{3}\pi r^3$ ⟶ 물리적속성을 장악하는 가장 중요한 개념




복사E와 중력이 평형이룸

$2\times10^{11}$ ($N/m^2$)

복사E가 중력을 이겨낼 만큼으로

$$P = \frac{1}{3}aT^4$$

($7.5\times10^{-16}$)

30°C ⟶ 0

(평상시 태양 압력 0

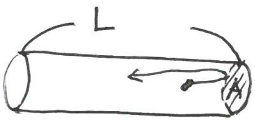
태양 중심의 압력 $10^{10}$

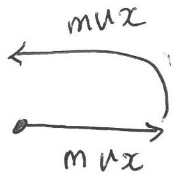
→ 빛을 맞아 날라간다.

지구 자체가 부서질 정도의 압력

볼쯔만 무덤 (공식)

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dP}{dt}$$




탄성충돌
= 이상기체

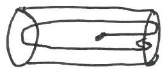
$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{\left(\frac{2L}{v_x}\right)} = \frac{mv_x^2}{L} = \frac{3v^2}{3L}$$

$$\Delta V = 2mv_x$$

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x}$$

N개이면

$$P = \frac{F}{A} = \frac{N \cdot \frac{3u^2}{3L}}{A} = \frac{N\,mv^2}{3AL}$$



2번 가서
충돌
→ 2L

$$= \frac{N \cdot m}{3V} u^2$$

(→ 밀도) $\rho$

$$= \frac{\rho}{3} u^2 = \frac{u^2}{3c^2} \rho c^2 = w\rho c^2$$

$$W = \frac{u^2}{3c^2} \rightarrow$$

$N_2$ 500 m/sec

c $3.0 \times 10^8$ m/sec

$h\nu \rightarrow w = \frac{1}{3}$

( $10^{-12} \fallingdotseq 0$ 보통에너지의 경우 0 )

---

MDU $w=0$ $\rho = \rho_0 R^{-3}$

RDU $w=\frac{1}{3}$ $\rho = \rho_0 R^{-4}$

RDU $w=\frac{1}{3}$

$$\dot\rho + 3\frac{\dot r}{r}\rho\left(1+\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\dot\rho + 4\frac{\dot r}{r}\rho = 0$$

$$\dot\rho + 4H\rho = 0$$

$$\dot\rho = -4H\rho$$

$$\dot\rho = -4\left(\frac{8\pi G}{3}\rho\right)^{\frac{1}{2}}\rho$$

$$\rho^{-\frac{3}{2}}\dot\rho = -\left(\frac{128\pi G}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\dot\rho = \frac{d\rho}{dt}$$

$$\int \rho^{-\frac{3}{2}} d\rho = -\left(\frac{128\pi G}{3}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

( → 6page에 이어짐 )

"아~ 재밌다~~~" 라고 정리한다.

우주를 향해
로켓을 쏜다.

Action Energy Force

$$\frac{\dot r}{r} \equiv H \text{ (허블상수)}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

→ 지구탈출속도 → 대기로
11.2km/sec

◦ flat한 우주

$$\frac{1}{2}mu^2 \fallingdotseq \frac{GMm}{r}$$

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{GMm}{r}$$

· potential이 크면
→ 수축

$$V_s = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = 11.2\ \mathrm{km/s}$$

$$\frac{1}{2}mu^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

정지궤도 3 km/sec

$$u = Hr$$

달공전속도 1 km/sec

$$\frac{1}{2}mH^2r^2 - \frac{Gm}{r}\frac{4\pi}{3}r^3\rho = 0$$

$$\boxed{H = \frac{8\pi G}{3}\rho_c}$$

$$\dot{\rho} = -4H\rho = -4\left(\frac{8\pi G}{3}\rho\right)^{\frac{1}{2}}\rho$$

$$\rho^{-\frac{3}{2}}\dot{\rho} = -\left(\frac{128\pi G}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt}$

$$\int \rho^{-\frac{3}{2}} d\rho = -\left(\frac{128\pi G}{3}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\rho^{-\frac{3}{2}+1} = -\left(\frac{128\pi G}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t$$

$$\rho^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{32\pi G}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t$$

$$t = \left(\frac{3}{32\pi G\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$$

• photon에 대한 압력공식 2가지

$$\begin{cases} P = \frac{1}{3}aT^4 \\ P = w\rho c^2 \end{cases}$$

$\frac{1}{3}aT^4 = w\rho c^2$ ($w = \frac{1}{3}$)

$\boxed{(\therefore)\ \rho = \frac{aT^4}{c^2}}$

우주의 밀도가 temp 에 연결됨

$$t = \left(\frac{3}{32\pi G\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{3}{32\pi G\frac{aT^4}{c^2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3c^2}{32\pi G a}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{T^2}$$

(t) 시간경과에 따른 온도(T)의 변화

$$T^2 = \left(\frac{3c^2}{32\pi G a}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t}$$

$$T = \left(\frac{3c^2}{32\pi G a}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{t}} = 1.5\times10^{10}\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$a = 7.5\times10^{-16}\ J/m^3K^4$

$G = 6.67\times10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot Kg^{-2}$

$F = \frac{GMm}{r^2}$

$G = N\cdot m^2\ Kg^{-2}$

$$T = 1.5\times10^{10}\frac{1}{\sqrt{t}}$$

(∴) 시간(t)을 알면 T(온도)를 알수있다.

Bigbang ~ 5만년 까지에 적용되는 수식

: RDU

$t = 10^{-6}$ sec  bigbang 이후 $10^{-6}$ sec 이후

$T = 1.5\times10^{10}\frac{1}{\sqrt{10^{-6}}} = 1.5\times10^{13} \doteqdot 1\text{GeV}$

$\sqrt{10^{-6}} = \sqrt{(10^{-3})^2} = \frac{1}{10^{-3}} = 10^3$

Giga $10^9$  **9 + 4 → 13**
온도 $10^4$  GeV

↳ boltzmann 상수 ($8.6\times10^{-5}$ eV/K) → $10^4$

• 양성자 938 MeV ≒ 1 GeV

(∴) 양성자를 만들 수 있는 온도

bigbang 이후 $10^{-6}$ sec 이후

양성자 생성됨.

온도 $10^{32}$K → $10^{19}$ GeV

$10^{27}$K → $10^{14}$ GeV

Grand Unified theory (GUT)

$10^{15}$K ← 100GeV

weak이론 ← $(W^{\pm}, Z^0)$ → o

"Standard Model" 같은 형제다 : 「최초의 3분」

"대칭성의 회복" → ($W^{\pm}$ → 80GeV, $Z^0$ → 91GeV)

$r \to 0$

(전자기 상호작용)

$\underline{9} + \underline{\underline{4}} \longrightarrow \underline{13}$

Giga $10^9$ | Boltzmann $10^4$, $8.6\times10^{-5}\ eV/K$ | → GeV

$10^{32}K \longrightarrow 10^{19}\ GeV$

$10^{27}K \longrightarrow 10^{14}\ GeV$ GUT (grand unified theory)

$10^{15}K \longleftarrow 100\ GeV$

$(W^{\pm}, Z^{0})$ $\gamma$

weak force — (전자기 상호작용)

"Standard Model" 같은 형제다.

$W^{\pm} \rightarrow 80\ GeV$

$Z^{0} \rightarrow 91\ GeV$

$\gamma \fallingdotseq 0$

## " 대칭성의 회복 "

$10^{13}K \longrightarrow 1\ GeV$

양성자 938 MeV ≒ 1 GeV

(∵) bigbang 이후 $10^{-6}$ sec 이후

양성자 생성될 수 있는 온도에 도달

$3K \longrightarrow 10^{-4}\ eV$ CMB

(∵) 지금 우주는 광자로 가득

그 속에 우리가 묻어있다.

우주 전체가 '광자'로 가득차 있다.

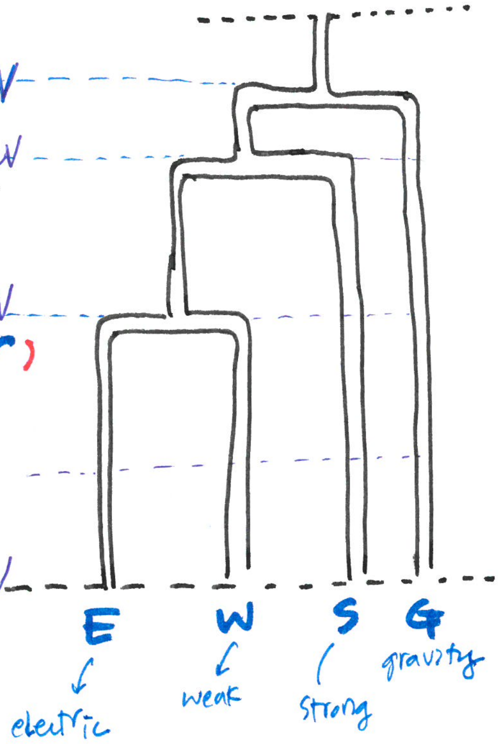
$10^{32} \rightarrow 10^{19}\ GeV$

$10^{27} \rightarrow 10^{14}\ GeV$ GUT

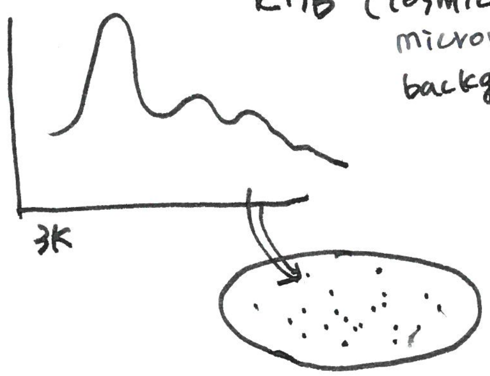
$10^{15} \rightarrow 100\ GeV$ $(W^{\pm}, Z, \gamma)$

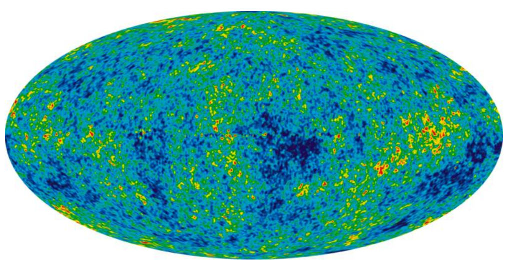
$10^{13} \rightarrow 1\ GeV$ n.p

$3K \rightarrow 10^{-4}\ eV$ CMB




CMB (cosmic microwave background)



$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}mg^2$$

$$\Rightarrow F \cdot x$$
(힘·거리)

$$W = \int F \cdot dx$$ force를 적분 → E

$$= \int \frac{dp}{dt}\,dx$$

$$= ma = \int \frac{dx}{dt}\,dp \quad \left(\frac{dx}{dt} \rightarrow v\right)$$

$$= \int v\, d(mv)$$

$$= m\int v\,dv$$

$$= m\,\frac{1}{2}v^2$$

(F=ma 를 적분하면 Energy

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$)

[ Freedmann Eq ]

반지름 (← R)

$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho\right]R^2 = -Kc^2$$

( ≒ 우주론을 푼다는 것
시간에 대한 반지름의 변화 알기 )

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c$$ → critical density

$$\frac{8\pi G}{3} = \frac{H_0^2}{\rho_{c0}}$$

$H_0^2$ → 현재 H 상수

$\rho_{c0}$ → 현재 critical density

$\rho_{c0}$ → '0'

$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{H_0^2}{\rho_{c0}}\left(\rho_m + \rho_{rel} + \rho_\Lambda\right)\right]R^2 = -Kc^2$$

$\rho_m$: matter, $\rho_{rel}$: relative, $\rho_\Lambda$: dark energy

$$\rho = \rho_0 R^{-3(1+w)}$$

$\rho_0$ → 현재 밀도

$$\rho_0 = R^{3(1+w)}\rho$$

MDU (matter dominat universe) $w=0$

$$\rho_{m0} = R^3\rho_m \leftarrow \rho_0 = R^3\rho$$

RDU (radiation 〃 〃 ) $w = \frac{1}{3}$

$$\rho_m = \frac{\rho_{m0}}{R^3} \leftarrow \rho_0 = R^4\rho$$

ΛDU ( dark energ 〃 〃 ) $w = -1$

$$\rho_0 = \rho$$

$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{H_0}{\rho_{c0}}\left(\frac{\rho_{m0}}{R^3} + \frac{\rho_{rel\cdot 0}}{R^4} + \rho_{\Lambda 0}\right)\right]R^2 = -Kc^2$$

$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - H_0^2\left(\frac{\left(\frac{\rho_{m0}}{\rho_{c0}}\right)}{R^3} + \frac{\left(\frac{\rho_{rel\cdot 0}}{\rho_{c0}}\right)}{R^4} + \frac{\rho_{\Lambda 0}}{\rho_{c0}}\right)\right]R^2 = -KC^2$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = H_0^2\left(\frac{\Omega_{m0}}{R} + \Omega_{\Lambda 0}R^2\right)$$

$$\int dt = \frac{1}{H_0}\int \frac{dR}{\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{R} + \Omega_{\Lambda 0}R^2}}$$

분자분모 $\sqrt{R}$ 곱함

$$t = \frac{1}{H_0}\int \frac{\sqrt{R}\,dR}{\sqrt{\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda 0}R^3}}$$

$$= \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{m0}}}\int \frac{\sqrt{R}\,dR}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)R^3}}$$

(치환적분)

$$\Omega_{m0} = \frac{\rho_{m0}}{\rho_c}$$

$$\Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c}$$

(각각적용)

$$t = \frac{1}{H_0}\int \frac{\sqrt{R}\,dR}{\sqrt{\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda 0}R^3}}$$

$$= \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{m0}}}\int \frac{\sqrt{R}\,dR}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)R^3}}$$

$$= \sqrt{1+\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)R^3} \equiv x$$

$$\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)R^3 = x^2 - 1$$

$$\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)3R^2\,dR = 2x\,dx$$

$$t = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{m0}}}\int \frac{R^{\frac{1}{2}}\cdot 2x\,dx}{x\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)3R^2}$$

$$= \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{m0}}\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)}\int \frac{dx}{R^{\frac{3}{2}}}$$

$$R^3 = \left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)(x^2-1)$$

$$t = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{m0}}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}}\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{m0}}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$* \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left[x + \sqrt{x^2-a^2}\right]$$

$$t = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{m0}}}\ln\left[x + \sqrt{x^2-1}\right]$$

현재 우주의 나이를 알게 된다.

$$t = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{m0}}}\ln\left[\sqrt{1+\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)R^3} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)R^3}\right]$$

WMAP
COBY
Frank → EU 공동체

Hubble 상수

$$[H_0]_{WMAP} = 2.3\times 10^{-16}\ \text{sec}$$

$$\Omega_{m0} = \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{m0} = 2.27$$

$$\Omega_{\Lambda 0} = 0.73$$

$R_0 = 1$ (현재)

$R = 10^{-17} \sim 1$

(지금 우주나이)

$$t_0 = 4.32\times 10^{17}\ \text{sec}$$

$= 1.37$ Gy $=$ 137억년

(∴) 이 모든 것의 유래는

$E = T + V$

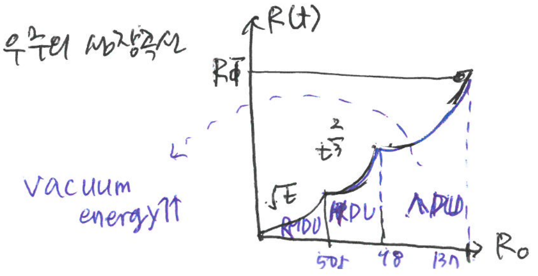
→ 이 유래는 $F = ma$

(∴) 우리 우주의 나이는 현재 137억년

이 사실을 알게 된 것은 1660 년

→ Newton 이후 과학이 발전했음

우주의 성장곡선



[ 우주의 성장 곡선 ]

$$\sinh^{-1} x = \ln \left[ x + \sqrt{x^2+1} \right]$$

$$\frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} = \ln \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right) R^3} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right) R^3} \right]$$

$$= \sinh^{-1} \left( \sqrt{\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right) R^3} \right)$$

arc (−)
hyperbolic
sin

$$\sinh^{+1}\left(\sinh^{-1} x\right) = x$$

$$\sinh \left( \frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} \right) = \sqrt{\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right) R^3}$$

$$\sinh^2 \left( \frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} \right) = \left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right) R^3$$

$$R^3 = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda 0}}\right) \sinh^2 \left( \frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} \right)$$

$$R = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda 0}}\right)^{\frac{1}{3}} \sinh^{\frac{2}{3}} \left( \frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} \right)$$

$$\left( * \ \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \right)$$

$$R = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda 0}}\right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{e^{\frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} - e^{-\frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}}{2} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$R = \left(\frac{\Omega_{m0}}{4 \Omega_{\Lambda 0}}\right)^{\frac{1}{3}} \left( e^{\frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} - e^{-\frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

① $H_0 t \gg 1$ $\quad t \gg \frac{1}{H_0} = t_H$ $\quad t \gg t_H$

Hubble time

$$R(t) = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda 0}}\right)^{\frac{1}{3}} e^{H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}$$

② $H_0 t \ll 1$ $\quad t \gg t_H$

$\boxed{\text{MDU}}$

$$R(t) = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda 0}}\right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{3}{2} H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$\sin x \cong x$
(아주작을때)
$\sinh^{-1} \cong$ [illegible]

$$R(t) = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda 0}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}}$$

- 공간 Energy ×

우주초기 : dark energy 사라지고
matter 〃 만 남음

$$R(t) = \left(\Omega_{m0}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{t}{t_H}\right)^{\frac{2}{3}}$$

⇒ "MDU" 에서의 공식

[Friedmann Eq]

F=ma 에서 유래

$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho\right]R^2 = -kc^2$$

(답을 미리 상정하다)

$$R = \left(\frac{t}{t_0}\right)^x$$

$$\dot\rho + 3\frac{\dot R}{R}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0$$ 플루이드 Eq

$$\frac{\dot R}{R} = \frac{x\left(\frac{t}{t_0}\right)^{x-1}\frac{1}{t_0}}{\left(\frac{t}{t_0}\right)^x} = \frac{\frac{x}{t_0}}{\frac{t}{t_0}} = \frac{x}{t} = H$$

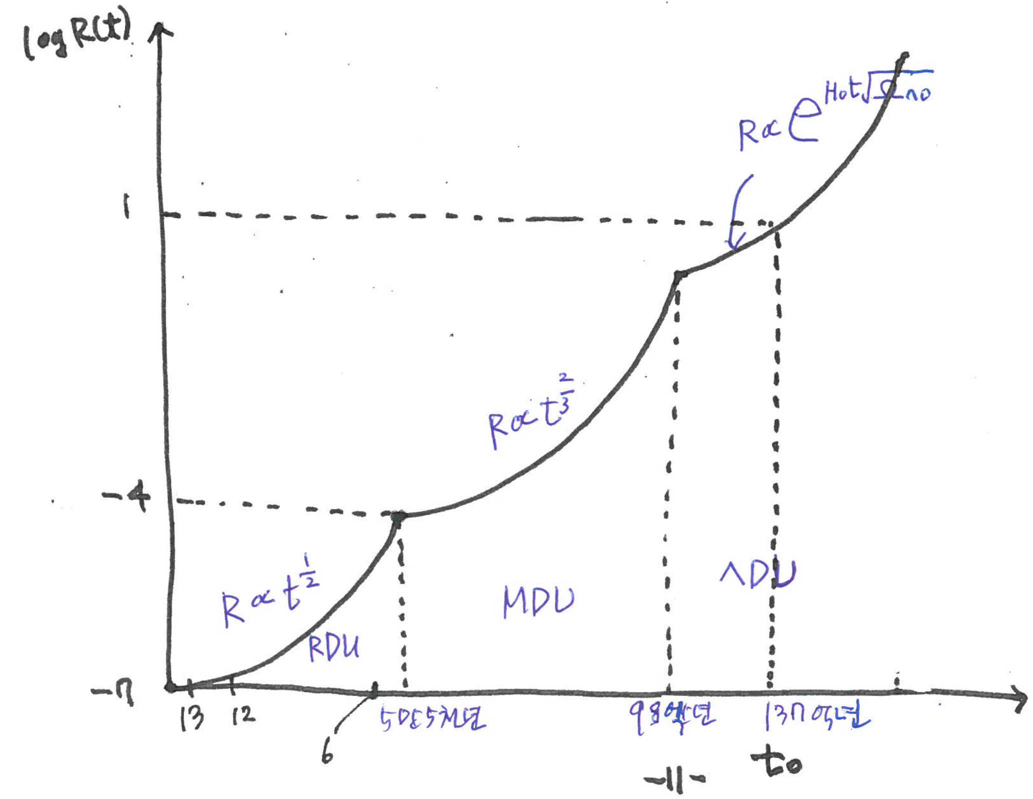
$$H_0 = \frac{x}{t_0}$$

(RDU) $w=\frac{1}{3} \rightarrow R(t) = t^{\frac{1}{2}}$

(MDU) $w=0 \rightarrow R(t) = t^{\frac{2}{3}}$

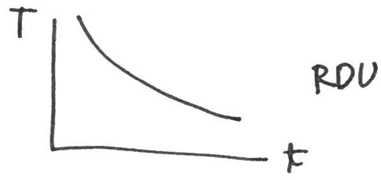
(ΛDU) $w=-1 \rightarrow R(t) = e^{H_0 t\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}$

* 우주의 크기변화



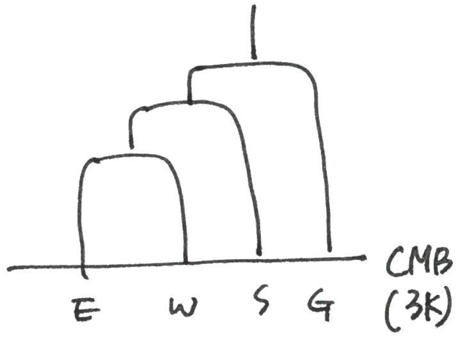

• $T = 1.5 \times 10^{10} \frac{1}{\sqrt{t}}$

$= t^{\frac{1}{2}}$




• Milky way 생성 : 98억년전 쯤처

• "Dark energy" 발견이 하나 남은 숙제.




( WMAP
planck

microwave

≒ photon 의 파장

* 11강의 핵심

F=ma 의 중요성

기원을 알았다.

# [ 제5회 137억년 우주진화 제2강 칠판내용 참조 ]

$$U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{Gm}{r}\frac{4\pi}{3}r^3\rho$$

$r(t) = a(t)x, \quad a(t_0)=1$ 공변좌표

$\dot{r} = \dot{a}x$

$$U = \frac{1}{2}m\dot{a}^2x^2 - \frac{4\pi G}{3}a^2x^2\rho$$

$$\frac{2U}{ma^2x^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{-2U\,c^2}{mc^2x^2a^2}$$

$$= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2}}$$

$a = R(t)$

Friedmann 방정식

$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho\right]R^2 = -Kc^2$$

$a(t) \rightarrow a(t_0)=1$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c \rightarrow \frac{8\pi G}{3} = \frac{H^2}{\rho_c}$$

$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{H^2}{\rho_c}(\rho_m + \rho_{rad} + \rho_\Lambda)\right]R^2 = -Kc^2$$

$$\rho = \rho_0 R^{-3(1+w)} \qquad \boxed{R^{3(1+w)}\rho = \rho_0} \qquad R^3\rho_m = \rho_{m0}$$

$$R^4\rho_{rad} = \rho_{rad0} \qquad \rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} \qquad \rho_m = \frac{\rho_{m0}}{R^3} \qquad \frac{\rho_{m0}}{\rho_c} = \Omega_{m0}$$

$$\left[\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{H^2}{\rho_c}\left(\frac{\rho_{m0}}{R^3} + \frac{\rho_{rad0}}{R^4} + \rho_{\Lambda 0}\right)\right]R^2 = -Kc^2$$

$$\left[\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{H_0^2}{\rho_c}\left(\frac{\rho_{m0}}{R} + \frac{\rho_{rad0}}{R^2} + \rho_{\Lambda 0}R^2\right)\right] = 0$$

$$\left[\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - H_0^2\left(\frac{\Omega_{m0}}{R} + \frac{\Omega_{rad0}}{R^2} + \Omega_{\Lambda 0}R^2\right)\right] = 0$$

$$\frac{dR}{dt} = H_0\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{R} + \Omega_{\Lambda 0}R^2} \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$\frac{1}{H_0}\int\frac{dR}{\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{R} + \Omega_{\Lambda 0}R^2}} = \int dt$$

$$\frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{m0}}}\int\frac{\sqrt{R}\,dR}{\sqrt{1+\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}R^3}} = t$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)R^3} = x$$

$$x^2 - 1 = \left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)R^3$$

$$2x\,dx = \left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)3R^2\,dR$$

$$t = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{m0}}}\int\frac{\sqrt{R}\,2x\,dx}{x\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)3R^2}$$

$$= \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{m0}}}\frac{2}{3}\int\frac{dx}{\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)R^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{m0}}}\frac{2}{3}\int\frac{dx}{\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda 0}}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$t = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

$0 \ldots\ldots 1$

$$\boxed{t = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}\ln\left[\sqrt{1+\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)R^3} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)R^3}\right]}$$

$73 \pm 3\ km\,s^{-1}Mpc^{-1} \quad \Omega_{m0} = 0.27 \quad \Omega_{\Lambda 0} = 0.73$

$R(t_0) = 1 \cdot = 137$억년 $= 4.32\times10^{17}$sec

$$\sinh^{-1}x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$\ln\left(\sqrt{1+\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)R^3} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)R^3}\right) = \frac{3}{2}H_0t\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}$$

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \qquad \frac{1}{n}\to 0$$

$2.71\ldots$

$$= \sinh^{-1}\sqrt{\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)R^3}$$

$$\left(\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}\right)R^3 = \sinh^2\left(\frac{3}{2}H_0t\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}\right)$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\int e^x dx = e^x \quad (e^x)' = e^x$

$$R(t) = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda 0}}\right)^{\frac{1}{3}}\sinh^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2}H_0t\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}\right)$$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i\sin(x)$$

$$= \left(\frac{\Omega_{m0}}{4\Omega_{\Lambda 0}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(e^{\frac{3}{2}H_0t\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} - e^{-\frac{3}{2}H_0t\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}\right)^{\frac{2}{3}} = i\sin x$$

$H_0t \gg 1 \rightarrow t \gg \frac{1}{H_0} \rightarrow t \gg t_H$, $t_{H,\,now}$

$$R(t) = \left(\frac{\Omega_{m0}}{4\Omega_{\Lambda 0}}\right)^{\frac{1}{3}}e^{H_0t\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}$$

$H_0t \ll 1 \rightarrow t \ll t_H$

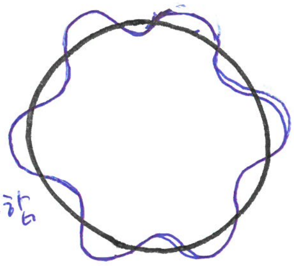
$$R(t) = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda 0}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(H_0t\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$R(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$

[ $E = h\nu$ ]

sin 파 개수를 알면 직선의 길이를 알 수 있다.

단, sin 파는 정수여야 함



원 안에 들어가는 파장의 개수를 센다

( 직선 길이 = 원 길이 )

$$\boxed{n\lambda = 2\pi r}$$

양자의 세계로

$$\rightarrow \lambda = \frac{2\pi r}{n} = \frac{2\pi r h}{n h} = \frac{rh}{n\frac{h}{2\pi}}$$

$$= \frac{rh}{n\hbar}$$

$$= \frac{h}{\left(\frac{n\hbar}{r}\right)} = \frac{h}{n\left(\frac{J\cdot sec}{m}\right)}$$

$$\frac{Nm\cdot sec}{m} = N\cdot sec$$

$$n\lambda = \frac{h}{n(N\cdot sec)}$$

$$F = ma = m\cdot\frac{m}{sec^2}\cdot kg\frac{m}{sec} \rightarrow mv = p$$

$$n\lambda = \frac{h}{n\cdot p}$$

$$(\therefore)\ \lambda = \frac{h}{p}$$

• entropy : 대규모로 "energy의 state를" count 하는 방법

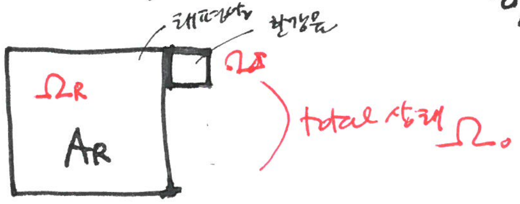
[photon 을 count 하는 방법]

Energy의 "state"

entropy : 입자가 들어갈 수 있는 에너지의 state 를 count 한다.

(thermal bath)

강력해 '과목'




CMB : 우주초기 상태를 찍다 (중성미자연기)

- 열역학의 핵심.

중첩가능

[ boson : 한 자리 여러개 (무한대)

fermion : 한자리 한개 ( 양성자 중성자 전자 )

$$\boxed{dU = TdS - pdV + \mu dN}$$

$$\Omega_0 = \Omega_R \Omega_\Delta^{=1}$$

델타

하나의 상태가 하나 = 1

벌어진 상태는 그 상태가 점유

$$= \Omega_R = e^{\ln \Omega_R}$$

(∵) 무지 하게 많으나 무한대는 아님

$$S_R = k\ln\Omega_R$$

$$\Omega_R = e^{\frac{S_R}{k}}$$

$$S_R = \underbrace{S_R^{\circ}}_{\text{꽃밭이 엄마가}} - \underbrace{\Delta S}_{\text{꽃을 피운다 자식을 낳다}}$$

$$\Delta S = \frac{1}{T}(dE + p\,dV - \mu\,dN)$$

$$= S_R^{\circ} - \frac{1}{T}(\Delta E + p\,dV - \mu\,\Delta N)$$

$\Omega\uparrow \rightarrow P\uparrow$

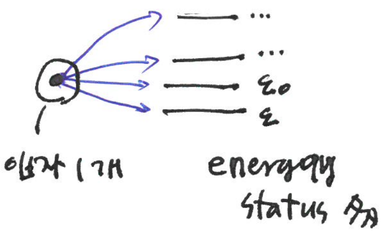
상태↑ 확률↑

$$\Omega_R = e^{\frac{S_R}{k}} = e^{\frac{1}{k}[S_R^{\circ} - \frac{1}{T}(\Delta E + p\,dV - \mu\,\Delta N^{\circ})]}$$

$$= \underbrace{e^{\frac{S_R^{\circ}}{k}}}_{=C}\; e^{\frac{-1}{kT}(\Delta E + p\Delta V - \mu\Delta N)}$$

$$= C e^{-\beta(\Delta E + p\Delta V - \mu\Delta N)} = P$$

$$P = ce^{-\beta(\Delta E + p\Delta V - \mu\Delta N)}$$

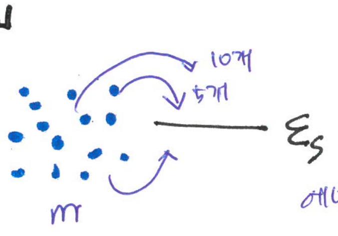



$\Delta N = 0$

$\Delta V = 0$

$\Delta E = \varepsilon_s$

$$P_s = ce^{-\beta\varepsilon_s}$$




$$\begin{cases} \Delta\varepsilon = m\,\varepsilon_s \\ \Delta N = n \end{cases}$$

입자개수 × 에너지 상태

$$P = ce^{-\beta(n\varepsilon_s - \mu n)}$$

$$P_n = ce^{-\beta n(\varepsilon_s - \mu)}$$

$\beta(\varepsilon_s - \mu) \equiv x$

$$\bar{n} = \frac{\Sigma m P_m}{\Sigma P_m} = \frac{\Sigma n e^{-nx}}{\Sigma e^{-nx}} = -\frac{\partial}{\partial x}\ln$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(\Sigma e^{-nx}\right)$$

$$\rightarrow \Sigma e^{-nx} \rightarrow \sum_{n=0}^{n=1} e^{-nx} = 1 + e^{-x} \quad \text{Fermi}$$

$$\sum_{m=0}^{n=\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} \quad \text{Boson}$$

$$dN = \underbrace{\left(\frac{d^3r\, d^3p}{h^3}\right)}_{\text{상태수}} \underbrace{\bar{n}(\varepsilon)}_{\text{입자 평균개수}}$$

$$= \frac{V\,4\pi p^2 dp}{h^3}\,\bar{n}(\varepsilon)$$

$E = pc \quad p = \frac{E}{c} \quad dp = \frac{d\varepsilon}{c}$

$$= \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,\frac{h\nu \cdot d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$U(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad \text{CMB}$$

에너지가 크면 (=고층으로 가면) 값(확률)이 준다

에너지가 낮으면 (=저층) 확률이 높다