137억년 우주의 진화 3회 4강 노트

슈뢰딩거 방정식

mhpark.co.kr의 강의를 보고 나름대로 정리해 보았습니다. 사진 출처도 mhpark.co.kr 입니다. 많이 부족하여 오류나 강의 내용을 잘 못 적은 부분이 있을텐데 알려 주시면 감사하겠습니다⌣̈ 구자경 올림

137억년 우주의 진화 3회 4강 노트
슈뢰딩거 방정식
주양자수 n
$V = 0$ (구속조건, 슈뢰딩거 방정식)
$V = ke^2/r$
m_l 자기양자수
l 각운동량 양자수
s 스핀 양자수
$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$

1. 주양자수 n
2. $V = 0$ (구속조건, 슈뢰딩거 방정식)
3. $V = ke^2/r$
   m_l 자기양자수
   l 각운동량 양자수
4. s 스핀 양자수
5. $\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$

(강의에는 없지만 주양자수 n에 대해 간단히 넣었습니다)
원운동 힘과 쿨롱 힘에 의해

$$mv^2 r = ke^2$$

닐스 보어의 가정 $(L = mvr = n\hbar)$과 위 식을 연립하면,

$$r = \frac{ke^2}{mv^2} = ... = a_0 n^2$$

그리고 이를 이용해 전체 에너지를 구하면,

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{ke^2}{r} = \frac{1}{2}\frac{ke^2}{r} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r}$$

$$E_n = -\frac{ke^2}{2a_0 n^2} = -\frac{13.6}{n^2}$$

137억년 우주의 진화 3회 4강 노트
슈뢰딩거 방정식
주양자수 n
$V = 0$ (구속조건, 슈뢰딩거 방정식)
$V = ke^2/r$
m_l 자기양자수
l 각운동량 양자수
s 스핀 양자수
$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$

시간독립인 슈뢰딩거(Schrodinger) 방정식을 고려 하자.
$p := -i\hbar\nabla$라 하면,

$$H\Psi = E\Psi$$

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V = \frac{(-i\hbar\nabla)^2}{2m} + V = \frac{-\hbar^2\nabla^2}{2m} + V$$

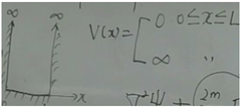
$$H\Psi = \frac{-\hbar^2\nabla^2}{2m}\Psi + V\Psi = E\Psi$$

정리하면,

$$\boxed{\nabla^2\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\Psi = 0} \qquad \text{(슈뢰딩거 방정식)}$$

퍼텐셜이 다음과 같은 경우 풀어 보자.

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \le x \le L \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$



V=0을 대입하면,

$$\nabla^2\Psi + \underbrace{\frac{2m}{\hbar}E}_{:=k^2}\Psi = 0$$

$$\nabla^2\Psi + k^2\Psi = 0$$

$$(\nabla + ik)(\nabla - ik)\Psi = 0$$

우항이 0가 되는 경우에서 편의상 1차원을 고려하면, 다음의 미분방정식을 푸는 것이다.

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} - ik\Psi = 0$$

137억년 우주의 진화 3회 4강 노트
슈뢰딩거 방정식
주양자수 n
$V=0$ (구속조건, 슈뢰딩거 방정식)
$V=ke^2/r$
m_l 자기양자수
l 각운동량 양자수
s 스핀 양자수
$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$

이 미분방정식의 해는

$$\Psi = e^{ikx}$$

이고 마찬가지 방법으로 좌항도 풀고 선형성을 이용해 해를 구하면 다음과 같다.

$$\Psi = e^{ikx} + e^{-ikx} = A\cos kx + B\sin kx$$

경계조건 $\Psi(0) = A = 0$에 의해, $A = 0$이다. 경계조건 $\Psi(L) = 0$에 의해,

$$\Psi(L) = B\sin KL = 0 \implies kL = n\pi \implies k = \frac{n\pi}{L}$$

$$k^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2$$

에너지가 양자화 되어 있다. 수소 원자의 에너지는 $13.6/n^2$이었다. 허용 n(양자수)에 대한 입자에너지를 구한 것이다.

방금 푼 퍼텐셜은 직각 좌표계로 풀 수 있지만 (모양도 직각 모양) 다음 퍼텐셜은 구면 좌표계를 도입해야 한다.

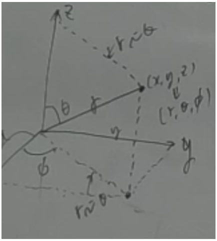
$$V(r) = \frac{ke^2}{r}$$

charge에 퍼텐셜을 곱해야 퍼텐셜 에너지가 된다. 구좌표로 풀어야 한다. 이 과정을 수학적으로 전개하는 과정이 주기율표의 기원이다.
일단 다음 결론을 받아 들이자. (증명 생략, 수리 물리학에서 4시간 정도 걸린다고 함..)

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta_i}\left(\frac{J}{h_i^2}\frac{\partial \Psi}{\partial \eta_i}\right) \quad (*)$$

i는 r, θ, ϕ... 알아야 할 건 h_1, h_2, h_3, $J = h_1 h_2 h_3$,

137억년 우주의 진화 3 회 4강 노트
슈뢰딩거 방정식
주양자수 n
$V = 0$ (구속조건, 슈뢰딩거 방정식)
$V = ke^2/r$
m_l 자기양자수
l 각운동량 양자수
s 스핀 양자수
$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$



구면좌표계로 변환 하자.

$$\mathbf{r} = r\sin\theta\cos\phi\hat{i} + r\sin\theta\sin\phi\hat{j} + r\cos\theta\hat{k}$$

$$\mathbf{g}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\hat{j} + \cos\theta\hat{k}$$

$$\mathbf{g}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\phi\hat{i} + r\cos\theta\sin\phi\hat{j} - r\sin\theta\hat{k}$$

$$\mathbf{g}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -r\sin\theta\sin\phi\hat{i} + r\sin\theta\cos\phi\hat{j}$$

$$h_1 = \sqrt{\mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_r} = 1$$

$$h_2 = \sqrt{\mathbf{g}_\theta \cdot \mathbf{g}_\theta} = r$$

$$h_3 = \sqrt{\mathbf{g}_\phi \cdot \mathbf{g}_\phi} = \sqrt{r^2 \sin^2\theta} = r\sin\theta$$

쟈코비안 Jacobian J를 구하면,

$$J = h_1 h_2 h_3 = r^2 \sin\theta$$

이제 (*)에 대입하자. (참고로 조장희 박사님이 진정한 물리학도라면 외워야 할 식이라고 함)

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2\sin\theta}{1^2}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r^2\sin\theta}{r^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{r^2\sin\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\right)$$

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{1^2}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}$$

137억년 우주의 진화 3회 4강 노트
슈뢰딩거 방정식
주양자수 n
$V = 0$ (구속조건, 슈뢰딩거 방정식)
$V = ke^2/r$
m_l 자기양자수
l 각운동량 양자수
s 스핀 양자수
$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$

Schrodinger 방정식으로 돌아와서 정리하면,

$$\nabla^2\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\Psi$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\Psi =$$

ϕ에 관한 미분방정식을 먼저 풀기 위해 3번째 항에서 $r^2\sin^2\theta$를 곱하면,

$$\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}) + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} + \frac{2mr^2\sin^2\theta}{\hbar^2}(E-V)\Psi = 0$$

궁극적으로 구하고 싶은 것은 Psi 함수 인데 다음과 같이 독립적인 세 개의 함수 곱으로 정하자. 이렇게 해도 되는가? 왜? orthogonal 하므로.. 변수 분리할 때 양자수가 나온다.

$$\Psi(r,\theta,\phi) := R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

위의 식을 다시 써 보면

$$\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2\Theta\Phi\frac{\partial R}{\partial r})+\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta R\Phi\frac{\partial\Theta}{\partial\theta})$$

$$+R\Theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}+\frac{2mr^2\sin^2\theta}{\hbar^2}(E-V)R\Theta\Phi=0$$

여기서 $R\Theta\Phi$로 나눠 주면,

$$\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})+\frac{sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+\frac{1}{\Phi}\frac{d\Phi}{d\phi^2}+\frac{2mr^2\sin^2\theta}{\hbar^2}(E-V)=0$$

3번째 항은 Φ에 대해서만 나와 있으므로 변수분리할 수 있다.

$$\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})+\frac{sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+\frac{2mr^2\sin^2\theta}{\hbar^2}(E-V)=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} \quad (**)$$

137억년 우주의 진화 3회 4강 노트
슈뢰딩거 방정식
주양자수 n
$V=0$ (구속조건, 슈뢰딩거 방정식)
$V=ke^2/r$
m_l 자기양자수
l 각운동량 양자수
s 스핀 양자수
$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$

왼쪽은 r,θ에 관한 함수이고 오른쪽은 ϕ에 관한 함수이다. 이게 성립하기 위해서는 반드시 상수여야 한다. 그 상수를 m_l^2라 하자.

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+m_l^2=0 \implies \frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+m_l^2\Phi=0$$

원자가 왜 존재하는지(?)를 설명하는게 양자역학 r,θ에 딱 맞는 양자 숫자 (quantum number)만이 존재 한다.
박사님께서 해마다 이런 강의를 할 수 있다는 게 기분이 좋다는 말씀하셨는데, 이런 강의를 들을 수 있다는게 행복합니다:)
$V=0$에서 했던 방식으로 인수분해 하자. 2차 미분 방정식을 1차 미분 방정식 2개로 바꿨다.

$$(\frac{d}{d\phi}+im_l)(\frac{d}{d\phi}-im_l)\Phi=0$$

두 번째 항을 고려하면,

$$\frac{d\Phi}{d\phi}=im_l\Phi$$

식을 약간 변형하여 적분을 취하자.

$$\int \frac{d\Phi}{\Phi} = \int i m_l \, d\phi$$

$$\ln \Phi = i m_l \phi \implies \Phi = e^{i m_l \phi}$$

지구본의 적도에 구슬 하나가 쭉 돌아간다고 생각해 보자.
중심에서 보면 방향에 대해서 동일하다. 다시 말해서
지구에서 대원을 그리고 한 바퀴 돌아왔을 때 물리적 공간이
동일해야 한다. 그래서

$$\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$$

$$\implies e^{i m_l \phi} = e^{i m_l (\phi + 2\pi)}$$

$$\implies 1 = e^{i m_l (2\pi)}$$

$$\implies \cos(2\pi m_l) = 1$$

$$\implies m_l = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l$$

137억년 우주의 진화 3회 4강 노트
슈뢰딩거 방정식
주양자수 n
$V = 0$ (구속조건, 슈뢰딩거 방정식)
$V = ke^2/r$
m_l 자기양자수
l 각운동량 양자수
s 스핀 양자수
$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$

이제 두 번째 변수 분리를 하자. (**)식에서 우항에 우리가
구한 m_l을 대입하자.

$$\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) + \frac{sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}) + \frac{2mr^2\sin^2\theta}{\hbar^2}(E-V) = m_l^2$$

R에 관한 함수로 만들어 보자. $sin^2\theta$으로 나누어 주고
정리하면,

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) + \frac{2mr^2}{\hbar^2}(E-V) = \frac{m_l^2}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}) \quad (***)$$

퍼텐셜 함수($V = ke^2/r$)도 r에 관한 함수이므로 좌변은
모두 r에 관한 함수이고, 우변은 θ에 관한 함수이다.
마찬가지로 상수여야 한다. 왜냐하면 미분했을 때 zero
이어야 하므로. 이전에 이미 르장드르가 이 방정식을 다
풀어 놓았다. 이런 형태의 2계 미분방정식은 반드시 $l(l+1)$
이 되어야 한다. 그런데 l은 한계가 정해져 있다. (닐스 보어)

$$l = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1$$

지금까지 구한걸 정리해 보자.

n	1(L)	2(M)	3(N)
l	0(s)	0,1(p)	0,1,2(d)
m_l	0	$0, \pm 1$	$0, \pm 1, \pm 2$

l은 도대체 무슨 의미를 가질까? (***) 식을 다시 보자.

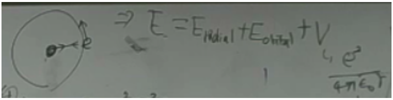
$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) + \frac{2mr^2}{\hbar^2}(E - V) = \frac{m_l^2}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}) = l(l+1)$$

여기서 첫 번째 식과 세 번째 식만 고려해서 다시 쓰면,

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) + \frac{2mr^2}{\hbar^2}(E - V) = l(l+1)$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) + \frac{2mr^2}{\hbar^2}(E - V - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}) = 0$$

137억년 우주의 진화 3회 4강 노트
슈뢰딩거 방정식
주양자수 n
$V = 0$ (구속조건, 슈뢰딩거 방정식)
$V = ke^2/r$
m_l 자기양자수
l 각운동량 양자수
s 스핀 양자수
$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$



전자가 돌아갈 때 직경 방향의 에너지(쿨롱 포스에 대한 에너지)와 원운동하는 운동 에너지(오비탈 에너지)와 양성자가 가지고 있는 쿨롱 퍼텐셜로 분리하자 ($E = E_{radial} + E_{orbital} + V$).
우리는 이 에너지 함수를 오로지 반지름에 관한 함수로 만들고 싶다. E를 위 에 대입할 때 $E_{orbital}$이 상쇄되어야 r에 관한 함수가 된다. 이러한 수학적 요청에 의하여

$$E_{orbital} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

오비탈은 궤도를 돌아가는 에너지 즉 운동 에너지이다.

$$E_{orbital} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m^2v^2r^2}{2mr} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

그런데

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = rp = mvr$$

이므로,

$$E_{orbital} = \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

따라서

$$\boxed{l(l+1)\hbar^2 = L^2}$$

l은 각운동량 양자수, 모멘틈 퀀텀 넘버.

137억년 우주의 진화 3회 4강 노트

슈뢰딩거 방정식

주양자수 n

$V=0$ (구속조건, 슈뢰딩거 방정식)

$V=ke^2/r$

m_l 자기양자수

l 각운동량 양자수

s 스핀 양자수

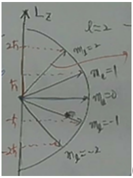
$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$

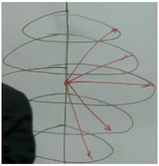
수소 Schrodinger 방정식 풀면 스핀 양자수 m_s는 못 구한다.
단백질이 탄수화물, 지방과 같이 묶어서 중요성을 모르듯이,
스핀을 같이 묶지 말자. 범주화의 오류 범하지 말자!
스핀이란 현상은 우주의 본질적인 현상이다.

$$\mathbf{L} = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

$$L_z = m_l \hbar$$

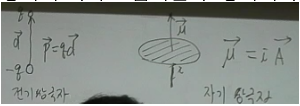
각운동량 x,y,z 성분이 있는데 그 중 z은축 성분만 양자화 되어 있다. 자세한건 강의를 참조해 주세요:)



(from mhpark.co.kr)


l=2인 경우를 고려 하자. $|L| = \sqrt{6}\hbar$

n, l, m_l는 원자핵 주위를 도는 전자로부터 나왔다. 그런데 m_s는 원자핵 주위를 돌든 안 돌든 상관 없이 원래 가지고 있는 현상이다. 스핀이 반정수면 페르미온, 정수면 보존. 양자수 뽑아내서 $\hbar$곱하고, 불확정성 원리를 고려하면 양자의 세계로 넘어간다. 양자역학 어렵게 생각하지 말자.



다시 고전물리학으로 돌아 가자. 전기 쌍극자

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$$

자기 쌍극자

$$\boldsymbol{\mu} = i\mathbf{A}$$

전하 q에 대응 되는게 전류 i.
토크는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\tau} = i\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

137억년 우주의 진화 3회 4강 노트
슈뢰딩거 방정식
주양자수 n
$V = 0$ (구속조건, 슈뢰딩거 방정식)
$V = ke^2/r$
m_l 자기양자수
l 각운동량 양자수
s 스핀 양자수
$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$

$$i\mathbf{A} = \frac{e}{T}\mathbf{A} = \frac{e}{2\pi r/v}\pi r^2 = \frac{evr}{2}$$

자기에 들어가는 에너지, 자장의 에너지는

$$u_m = -\boldsymbol{\mu}\mathbf{B}\int \sin\theta = -\boldsymbol{\mu}\mathbf{B}\cos\theta = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$$

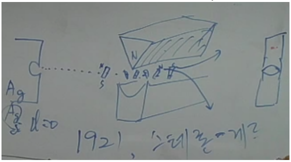
이 공식 암기하자. 중요!

$$\boxed{u_m = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}}$$

원자가 마그네틱 필드 안에서 포스를 가진다. 양성자가 돌아간다고 생각하면 전류가 흐르고 자장이 생기는데 0.4T 정도 생긴다. 누가 건드려 준 것도 아닌데 0.53 옹스트롬 되는 공간 속에 엄청난 자기장이 생긴다.
수학적으로 구했는데 실제 어떻게 측정 할까? n은 거시세계에서 잴 수 있었다. l값은 zeeman이 측정했다.
zeeman effect에 대한 공식은,

$$E_{n,l} = E_n - \mu_B \mathbf{B} m_l$$

$\boldsymbol{\mu}_B$는 상수이고 자기장 B는 고정된 것. 자석과 커플링 되어 에너지 레벨을 세분화 해 준다. 원자에 자장을 걸어 줬을 때 에너지가 m_l에 의해 분리된다. 예를 들어 n=2이면 5개로 분리된다. l=0이면 각운동량이 0라는 말이고 분리가 안된다. l=0인 상태를 만들어서 스크린 실험을 했다. 이 실험이 인류에게 스핀을 보여준 슈테른-게를라흐 실험(1921, Stern–Gerlach experiment).



은(47번)의 최외각 전자는 1개. 실험조건 : l=0(각운동량 0). 따라서 분리가 되면 안된다. 원래 양자론으로 생각했을 땐 일자로 나와야 되는데, 자연이 보여준 것은 초승달 모양이 나왔다. $2l + 1 =?2$. 여기서 측정한 것은 각운동량이 아니라

137억년 우주의 진화 3회 4강 노트
슈뢰딩거 방정식
주양자수 n
$V = 0$ (구속조건, 슈뢰딩거 방정식)
$V = ke^2/r$
m_l 자기양자수
l 각운동량 양자수
s 스핀 양자수
$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$

스핀이다. 그 당시 과학자들은 l처럼 양자화된 어떤 물리량 스핀이 만약 존재하면

$$2s + 1 = 2$$

라고 생각했다. 그러면 스핀양자수 $s = \frac{1}{2}$, 양자화 시키면 $s = \frac{1}{2}\hbar$.
l처럼 양자화된 어떤 물리량이 있다는 걸 알게 되었다. 그걸 스핀이라고 불렀고, 전자만 있는 게 아니라는 것을 알게 되고, 입자 전체를 스핀이 정수인 경우 보존, 반정수인 경우 페르미온으로 분류했다. L_z처럼 S_z도 다음과 같이 나타낼 수 있다.

양자역학의 근본 원리는 구속되면 양자화 된다. 구속 안되면 연속적이 된다. 그러면 자유전자가 되고 어떤 값도 가질 수 있다. 구속되는 순간 아무 에너지나 가질 수 없게 된다. 빅뱅 후 38만년 후 전자는 양성자에 구속 되었다.

$$E = h\nu$$

$$E = \sqrt{(pc)^2 + m^2c^4}$$

광자를 고려해 m=0을 대입하면, $E = pc$이고 $c = \nu\lambda$를 대입해 정리하면.

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu}{\nu\lambda}$$

$$\boxed{p = \frac{h}{\lambda}} \qquad \text{(드브로이 공식)}$$

137억년 우주의 진화 3회 4강 노트
슈뢰딩거 방정식
주양자수 n
$V = 0$ (구속조건, 슈뢰딩거 방정식)
$V = ke^2/r$
m_l 자기양자수
l 각운동량 양자수
s 스핀 양자수
$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$

이 공식으로 모든 입자는 파동의 성질을 갖는다는 것을 보여주었다.

$$\nabla^2\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\Psi = 0 \qquad \text{(슈뢰딩거 방정식)}$$

구속조건이 없는 경우를 고려 하자. 슈뢰딩거 방정식에서 V=0일 때 풀면,

$$\boxed{\Psi = e^{i(kx-wt)}} \qquad \text{(평면파 공식)}$$

평면파(plane wave)에 여기에 있는 값들은 구속되어 있지 않다. 드 브로이 공식을 약간 변형하면,

$$p = \frac{h/2\pi}{\lambda/2\pi} = \hbar(\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda}}_{\text{k벡터}}) = \hbar k$$

$w = 2\pi f$이고 $E = h\nu = \hbar(2\pi\nu) = \hbar w$이고, 이를 w에 대해 정리하여 평면파 공식에 대입하면,

$$\Psi = e^{i(kx-wt)} = e^{i(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t)}$$

$$\boxed{\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}}$$

라그랑지안 강의에서 공간 대칭에서 모멘텀이 나오고, 시간 대칭에서 에너지가 나온다고 했던 걸 생각하자. 양자역학은 연속적인 개념도 가지고 있고, 어떤 퍼텐셜에 갇히는 양자 개념도 가지고 있다. 양자론을 다른 말로 하면 확률론적 결정론.

m과 m_l의 개념은 같다. m_l은 단지 L의 z축 방향의 값이다. $L_z = m_l\hbar$. 왜 전자는 원자 주위를 돌아야 하는 숙명을 가진 걸까? l이 아무리 커져도 z축에 평행이 될 수 없다. z축에 평행이 되면 $L = L_x\hat{i} + L_y\hat{j} + L_z\hat{z}$에서 $|L_z| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$가 된다. L_x, L_y가 0가 되고 이는 불확정성 원리에 위배 된다. 그래서 깔대기 처럼 계속 돌아 간다.

감사합니다.