제 11회 우주의 진화 2강 최소작용의 원리

(박문호 박사님의 강의를 요약 정리한 내용입니다.)

학문을 한다는 것은 새로운 관점을 갖는 것이다.
물리학을 3개월 정도 공부했다면 새로운 관점을 가져야 한다.
기본 관점에 묶여 있기 때문에 새로운 관점을 갖는다는 것이 쉽지는 않다.

아인슈타인은 특수상대성이론에서는 속도의 관점으로 세계를 보았고, 일반상대성 이론에서는 질량관점으로 보았다.

오늘 강의에서의 세계관은 질점(質點)관점으로 세계를 본다. Point 관점이다.
질점은 선이나 평면에서의 한 점이다. 점에 질량을 붙이면 질점이 된다.

인간은 100년 밖에 못 산다. 그 후에는 우리 몸을 구성했던 60조개의 세포는 분해되고, 세포를 구성했던 분자와 그 분자를 구성했던 무수한 원자는 뿔뿔히 흩어진다. 그 분자, 원자 하나 하나를 점으로 본다.
우주의 그 어떤 것도 이런 관점에서 예외가 존재하지 않는다. 바위나, 나무나, 꽃도 마찬가지이다.

시간 차이만 있을 뿐 그 point는 이동을 한다. Point의 이동이 오늘 강의의 핵심이다.
우주의 모든 것은 잠시 덩어리 져 있다가 흩어진다.
인간은 100년 정도, 바위는 천만년 정도 덩어리 져 있다가 흩어진다. 지중해도 모두 마르는데 1000년 걸렸다.
이 관점에서 어느 것도 빠져 나갈 수 없고 우주의 모든 것을 설명할 수 있다. 이 관점을 몸에 붙이기 바란다.

물리학은 고전물리학과 양자물리학으로 구분하는데, 일반 상대성 이론도 고전물리학이다.
점으로 보는 것이 고전물리학이고, 양자의 세계는 포인트가 아닌 범위로 본다. 그것이 불확정성 원리이다.

우주의 모든 것은 모였다 흩어진다.
45억년 전에는 태양도 지구도 없었다. 그 전에는 성간 물질로 엄청나게 넓은 공간에 아주 희박하게 흩뿌려져 있었다. 질점이 모였다 흩어진다.
목련, 벚 꽃 다 어디 갔나. 10여일 피고는 사라졌다. 모든 것은 변화한다.
변화는 시간이라는 변수를 깔고 있다.

질점의 이동에 시간을 넣으면 속도가 된다.
질점에 질량을 넣으면 에너지 세계가 된다. 속도와 에너지는 질점에 부여된 속성이다.
질점의 위치 공간의 거리를 재면 속도가 나온다. 속도는 vector이다. vector는 방향이 있다.
그러면 미래가 결정된다.

파인만이 우주의 모든 것은 세가지 뿐이라고 했다.
"전자가 여기서 저기로 이동한다

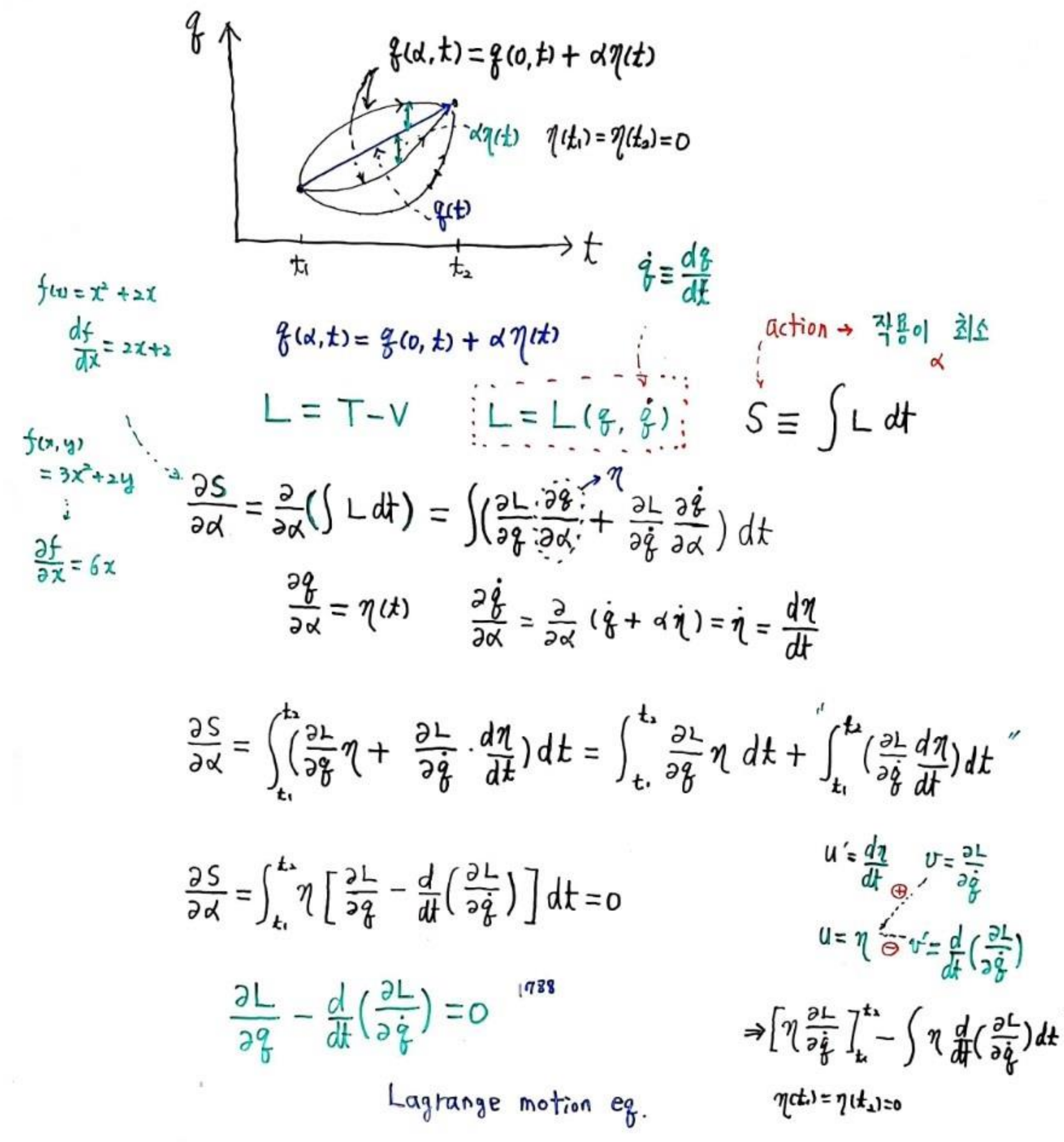
광자가 여기서 저기로 이동한다.
광자가 전자를 흡수하거나 방출할 수 있다.”
이 세가지 현상으로 중력을 제외한 우주의 대부분을 설명할 수 있다고 했다.

질점이 질량을 갖고 이동하면 운동량이 되고, 질점 이동의 시간에 대한 변화율이 force 이다.
force 곱하기 거리는 에너지이다. 운동량과 에너지, 질점 이외에는 없다고 생각하라.
물리학을 공부하고도 새로운 세계관이 열리지 않고 옛날 식으로 이야기하면 새로운 관점을 얻지 못한 것이다.
일반상대성이론에서는 질량으로 이야기하고 뉴턴 역학은 force 로 이야기 한다.

라그랑지안, 헤밀토니안의 세계에서 가장 중요한 것이 질점이다.
이차원 직각 좌표 계에서 한 질점 point가 이동하는 것을 운동이라 한다.
그래서 라그랑지안 동역학, 해밀톤 동역학, 뉴톤 역학이라 한다.

3년전 유미과학재단과 박자세가 공동으로 세미나를 개최한 적이 있다. 그 때 강연자로 나오신 건국대 물리학 교수를 직접 만나 의견을 나누었는데, 내가 질문하기를 앞으로 물리학이 어떻게 변하겠습니까 하고 물었더니 그 교수님께서 “아마 100년이 지나도 살아남을 수 있는 것이 딱 하나 있는데 해밀톤 원리이다. 왜냐하면 거의 모든 물리학이 해밀토니안 원리에 기초를 두고 있기 때문이라고 말씀하셨다. 해밀톤 원리가 다른 말로 최소 작용의 원칙이다.

(방정식의 자세한 내용은 동영상을 참고하시기 바랍니다).



$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)=0$$

Lagrange motion equation이다. 1788년에 나왔다.

라그랑지, 해밀톤 베르누이, 포아송 등이 같이 노력한 결과이다.

질점 즉 내 몸을 구성하고 있던 무수한 원자들이 50년 후 100년 후 어디로 갈 것인가를 알려 준다.

사람뿐만 아니라 지구 태양의 운명도 안다.

양자역학을 만든 학자들이 공부했던 이론 체계가 바로 이 체계였다.

이것을 그대로 양자에 옷을 입혔다. 교환자나 불확정성 원리 모두 이 옷을 입었다.

이 옷은 누구에게나 잘 맞았다. 그래서 그냥 입으면 되었다.

뉴톤 역학도 포함되어 있고 아인슈타인도 이 옷을 입고 중력장 방정식까지 그냥 나가 버렸다.

이것이 우주의 가장 근본적인 법칙이기 때문이다.
자연은 가장 에너지가 적게 드는 방식으로 운용된다. 최단거리로 간다.
가장 에너지가 낮은 상태가 확률이 가장 높다.

$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0$ 이 공식이 무엇을 의미하는가?
라그랑지안은 에너지이다. 그 에너지를 위치를 갖고 미분한다는 것은 무엇을 의미하는가
또한 라그랑지안을 속도로 미분한 값을 다시 시간으로 미분한다는 것은 무엇을 의미하는가

이 공식은 범 함수(함수의 함수)이다. 무수히 많은 방정식이 포함되어 있다.
이 방정식이 물리의 모든 것을 설명한다.
(수식은 동영상을 참고하시기 바랍니다.)

action 작용

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \Leftarrow \boxed{\delta S = 0}$$ 최소작용의 원칙

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt}\Big(\overset{P}{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}\Big) = 0 \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \equiv P$$

운동량 상수

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt}(\dot{q}P - L) = 0 \rightarrow \dot{q}P - L \equiv H$$

$$(AB)' = A'B + AB'$$

$$\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial t} = \overset{\dot{P}}{\frac{\partial L}{\partial q}}\,\overset{\dot{q}}{\frac{\partial q}{\partial t}} + \overset{P}{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}\,\overset{\ddot{q}}{\frac{\partial \dot{q}}{\partial t}} = \dot{P}\dot{q} + P\ddot{q} = \frac{d}{dt}(\dot{q}P)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}P - L) = 0 \rightarrow \dot{q}P - L \equiv H$$ 에너지 상수

$$\Delta\theta \times \vec{r} = \overset{dq}{\Delta \vec{s}}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$

$$dL = \overset{\dot{p}}{\frac{\partial L}{\partial q}}dq + \overset{p}{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}d\dot{q} = \dot{p}\,dq + p\,d\dot{q} = \dot{p}\cdot(\Delta\theta\times r) + p\cdot(\Delta\theta\times\dot{r})$$
$$= \Delta\theta\cdot(r\times\dot{p}) + \Delta\theta\cdot(\dot{r}\times p)$$
$$= \Delta\theta\cdot[(r\times\dot{p}) + (\dot{r}\times p)]$$
$$= \Delta\theta\cdot\frac{d}{dt}(r\times p) = 0$$

$$\vec{r}\times\vec{p} \equiv \vec{L}$$ 각운동량 상수

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = rp\sin\theta$$
$$= rp = rmv = n\hbar$$
$n = 1, 2, 3,$

물리학은 상수를 찾는 학문이다. 상수는 바뀌지 않는다. 바뀌지 않으므로 보존된다.
에너지 보존법칙, 운동량 보존 법칙. 모두 상수를 찾는다. 상수를 찾는 것이 물리학이다.

운동에는 2가지가 있다. 선 운동과 각운동이다.
선 운동이 보존된 것이 운동량 상수 P이고, 각운동이 보존된 것이 각운동량 상수 L이다.
$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0$ 에서 운동량 상수(P), 에너지 상수(H), 각 운동량 상수(L)이 구해 졌다.

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$≡P---→운동량 상수
$qP \dot{\equiv} H$-→에너지 상수
$\vec{r} \times \vec{p}$≡$\vec{P}$-→각 운동량 상수

모든 물리 문제에는 이 3가지 보존법칙이 적용되고, 이 3가지는 라그랑지안 운동 법칙에서 나왔다.
양자 역학은 이것이 없이는 나올 수 없었다.
그래서 입자물리학회 회장께서 앞으로 100년 이후에도 영원히 살아남아 있을 유일한 이론을 해밀톤 원리라고 한 것이다.
운동량 상수, 에너지 상수, 각 운동량 상수. 물리학 끝이다.
나머지 수천 수만의 물리학 문제는 이 3가지로 푸는 것이다. 자연과학의 하이라이트이다.
상수는 보존이다. 시간에 대하여 공간에 대하여 변하지 않는다.

포아송 방정식이 최 정점을 찍고 고전 물리학은 완성되었다.
포아송 방정식을 양자역학에서 교환자로 활용하면서 양자역학의 수식화가 가능해 졌다.
전 세계 모든 교과서에 나오는 말이다.
라그랑지안, 해밀토니안, 포아송 이 세 단계를 거치면서 고전 물리학이 완성되고 일반상대성 이론까지 다 끝난다.

다음은 해밀토니안으로 간다.

에너지라는 개념이 300년 전에는 없었다고 생각해야 한다.
에너지 개념 이전에 에너지 보존이란 개념이 먼저 나왔다.
온도와 일을 합친 개념이 에너지이다. 에너지와 일의 관계를 주목했다. 일은 force에 거리를 곱한 것이다.
일이 에너지이다. 열(온도), 일 모두 에너지이다. 전체 에너지 중에서 일로 가지 않은 것은 열로 빠졌다.
열과 일을 합하면 전체 에너지가 된다는 것을 알았다. 에너지가 보존 된다는 것을 알게 된 것이다.

(수식은 동영상을 참고하시기 바랍니다.)

$$L(q, \dot{q}, t) \qquad H(q, P, t)$$

$$dL = \overset{\dot{p}}{\frac{\partial L}{\partial q}} dq + \overset{p}{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}} d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$\begin{aligned} dH &= d(\dot{q}p - L) = \dot{q}dp + pd\dot{q} - dL \\ &= \dot{q}dp + pd\dot{q} - (\dot{p}dq + pd\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} dt) \\ &= \dot{q}dp - \dot{p}dq - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

Hamilton's canonical motion eq.

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial P}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

이 두 식이 Hamilton's canonical motion equation (해밀턴 정준 운동 방정식) 이다.
물리학 역사상 가장 위대한 수식이다. $E=MC^2$ 보다 10배 이상 위대한 수식이다.
그래서 물리학학회장 하신 분이 이 방정식은 영원할 것이라고 하셨다.

에너지를 모멘텀으로 미분하면 속도가 된다.
그리고 에너지를 위치에 대하여 편 미분 해 주면 모멘텀의 시간적 변화가 된다.

물리학은 상수를 구하는 학문이다. 에너지 상수는 보존된다. 보존되지 않는 것은 사라지고 없다.
상수는 몇 가지 되지 않는다. 상수는 암기해야 한다.

질점은 모든 것에 해당 된다.
태양일 수도 있고, 지구일 수도 있고, 내 몸도 되고, 몸 속의 세포, 분자, 원자도 된다.
위치가 주어지고, 그기에 시간이라는 함수를 붙이면 이동, 즉 운동이 있게 된다.
라그랑지안은 위치와 속도의 함수이다. 시간의 함수는 디폴트이다. 위치의 이동은 질점의 이동이다.
질점이 있고 질점이 움직인다는 현상으로 우주의 모든 것을 설명하겠다는 것이다.
매우 독특하고 통쾌한 관점이다.

해밀토니안은 위치와 모멘텀의 함수이다.
질량과 속도의 곱이 모멘텀이다. 질량은 상수이므로 속도와 모멘텀은 같은 개념이다.
모멘텀을 시간으로 미분하면 Force가 된다. $\frac{\partial H}{\partial q}= \dot{p}$이다.
먼저 $\dot{q}$ 부터 보자

$$H = T+V = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{2p}{2m} = \frac{2mv}{2m} = v$$

$\dot{q}$=v 가 된다.

$$H = T+V, \quad T(\dot{q}),\ V(q)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial}{\partial q}\left[T(\dot{q}) + V(q)\right] = -\frac{\partial}{\partial q}V(q) = F$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m\frac{dv}{dt} = F$$

$\dot{p}$=$\frac{dp}{dt}$=$\frac{d(mv)}{dt}$=m$\frac{dv}{dt}$=ma=F
모멘텀을 시간으로 미분하면 force가 된다.
V(q)그릇의 포텐셜 에너지의 경사도가 force이다.

다음은 포아송 방정식이다.

q, p, t에 대한 임의의 함수에 대하여 적용해 본다. 우주에 있는 모든 함수가 될 수 있다.

위치와 모멘텀으로 설명되는 어떤 함수도 그것의 시간적 변화를 계산해 낼 수 있다는 것이다.

즉 그들의 운명을 안다는 것이다. 그래서 고전 물리학은 결정론이라 한다.

라플라스가 "당신의 초기치만 알려주면 당신의 운명을 결정할 수 있다"고 했다. 그 말이 여기서 나왔다.

한 점으로 보는 것은 고전 물리학이고, 양자역학도 한 점으로 보기는 하지만, 그 점이 확률적으로 분포한다는 점만이 다르다.

(수식 설명은 동영상을 참고하시기 바랍니다.)

$$f(q, p, t)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}\underbrace{\frac{\partial t}{\partial t}}_{1}$$

$$\frac{df}{dt} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{df}{dt} = \underbrace{\{f, H\}}_{\text{Poisson bracket}} + \frac{\partial f}{\partial t} \rightarrow i\hbar\{f, H\} = \underbrace{[f, H]}_{fH - Hf}$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \rightarrow \text{양자역학}$$

$$= 0 \ \text{고전물리}$$

포아송 괄호(Poisson bracket)가 고전 물리학의 끝이다.

위치와 모멘텀을 미분한 값 2개를 곱해주고 그리고 곱한 값의 순서도 바꾸었다.

이것을 양자 역학에서 그대로 도입한다. 양자역학의 교환자와 같은 관계이다.

프랑크 상수와 허수를 붙여주면 양자역학이 된다. 양자역학에서 포아송 괄호를 그대로 쓴다.

위치에 관한 함수와 모멘텀에 관한 함수만 알면 전체를 다 알 수 있다.

에너지를 알면 모든 것을 알 수 있다
내가 앞으로 어떻게 될 것인가는 내가 먹은 총 에너지와 관련이 있다.

포아송 괄호는 어떤 함수와 그 함수와 관련된 에너지와의 상호관계이다.
우주의 어떤 것도 이 공식을 벗어날 수 없다.

아인슈타인의 일반 상대성 이론과도 같은 맥락이다.
우주의 모든 존재는 우주의 기하학적 구조에 따라 운동을 한다.
아인슈타인은 우주의 기하학적 구조와 에너지 개념을 같은 값으로 두었다. 중력장 방정식에는 Force는 없다.
태양의 에너지에 의해 태양 주변의 시공이 휘어진다. 지구, 화성 등은 휘어진 괘도를 돈다.
지구라는 입자의 운동은 에너지가 만들어 주었다.
모멘텀을 안다는 것은 질량과 속도를 안다는 것이고 속도와 질량을 알면 에너지를 계산할 수 있다.
에너지 값이 위치와 모멘텀에서 어떻게 바뀌었는지를 알면 그것이 운명이 된다. 그것이 포아송 방정식이다.
태양이라는 에너지가 시공의 곡률을 만들었다. 그 곡률이 입자가 가는 길이다.

사람도 몸무게와 위치를 알면 그 사람의 운명을 알 수 있다.
옛날에는 몸집이 큰 사람일수록 높은 자리를 차지 했다.
짐승도 몸집이 큰 놈이 위 자리를 차지한다.
그리고 사회적 위치에 따라 사람의 운명이 달라진다.

이 모든 것을 담고 있는 것이 포아송 괄호이다.
위치와 모멘텀만 알면, 위치와 모멘텀에 대하여 에너지를 미분해 보면, 운명은 그 속에 다 있다.
운명은 에너지이다. 지구 운명은 태양의 질량(에너지)에 의해서 만들어 진다. 에너지가 운명이다.

우주는 시간과 공간으로 구성되어 있다.
공간과 시간의 구조는 에너지가 만들어 주었다. 시간과 공간의 구조가 세계이다.
世界에서 世는 시간을 말하고 界는 공간을 말한다. 시간의 구획이 世이고, 공간의 구획이 界이다.
세계는 시간과 공간이란 직물로 된 구조이고 그것이 바로 우주이다.

시간과 공간은 우주의 무대 장치이다. 연극 배우는 물질 덩어리(지구, 사람)이고 질량(에너지)이다.
무대 장치인 시간 및 공간과 그 무대에서 공연하는 물질 덩어리(존재)가 서로가 서로를 만들어 주었다.
물질 에너지가 시공의 곡률을 만들었고, 그렇게 만들어진 시공의 곡률이 그 물질들의 운명인 것이다.
존재와 시공의 관계를 보여준 것이 일반 상대성이론이다.

그 이야기를 포아송 방정식은 먼저 더 명확하게 보여 주었다. 고전 물리학의 끝이다.
그리고 옷을 갈아 입고 양자역학으로 갔다.

본질은 에너지이다. 에너지를 위치에 대하여 미분하고, 에너지를 모멘텀에 대하여 미분한다.
에너지의 공간적 변동과 에너지의 질량적 변동을 본다는 것이다. 그것이 우리를 포함한 모든 존재이다.
위치와 모멘텀으로 설명되는 임의의 어떤 함수도 이 운명을 벗어날 수 없다.

진리는 아름다움이다.
물리학의 정석의 저자 서스킨트는 라그랑지안과 해밀톤 방정식은 아름다움을 끝까지 추구하는 프랑스인의 생리에서 나왔다고 했다.

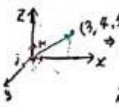
이 식이 얼마나 위대한지 문제를 직접 풀어보겠다.
이 쪽 연구자들이 하는 구체적 작업은 해밀토니안을 구하는 일이다.
이 예는 원자 주위를 전자가 돌 때의 해밀토니안을 구하는 것이다.
전자가 돌면 전류가 된다. 전류가 흐르면 자기장이 생긴다. 전자의 속도와 자기장과의 상호작용도 일어난다.
그러므로 원자핵 주위를 도는 전자의 해밀토니안을 구하는 것이 물리학에서 대단히 중요하다.

(수식 설명은 동영상을 참고하시기 바랍니다.)

$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ Scala potential $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - (q\phi - q\vec{v}\cdot\vec{A})$$

Vector potential



$\rightarrow \vec{v} = 3i + 4j + 5k$

$i \cdot i = 1 \quad i \cdot j = 0$

$i\,j \cos 90° = 0$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - q\phi + q(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) \cdot (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})$$

$i \cdot i = 1$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - q\phi + q(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z)$$

$$H = T + V = \dot{q}P - L = (\dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k) \cdot (P_x i + P_y j + P_z k) - L$$

$$= \dot{x}P_x + \dot{y}P_y + \dot{z}P_z - L \qquad P_y = m\dot{y} + qA_y \qquad P_z = m\dot{z} + qA_z \qquad \dot{x} = \frac{P_x - qA_x}{m}$$

$$P \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \qquad P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - q\phi + q(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z)\right] = m\dot{x} + qA_x = P_x$$

$$H = \dot{x}(m\dot{x} + qA_x) + \dot{y}(m\dot{y} + qA_y) + \dot{z}(m\dot{z} + qA_z) - [\quad " \quad] = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q\phi$$

$$H = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q\phi = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{P_x - qA_x}{m}\right)^2 + \left(\frac{P_y - qA_y}{m}\right)^2 + \left(\frac{P_z - qA_z}{m}\right)^2\right] + q\phi$$

$$H = \frac{1}{2m}\Big[\underbrace{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}_{P\cdot P = P^2} - 2q\underbrace{(P_xA_x + P_yA_y + P_zA_z)}_{-2P\cdot A} + \underbrace{(qA_x)^2 + (qA_y)^2 + (qA_z)^2}_{(qA)^2}\Big] + q\phi = \frac{1}{2m}\left[P^2 - 2P\cdot A + (qA)^2\right] + q\phi = \frac{1}{2m}(P - qA)^2 + q\phi$$

$$\hat{H}\Psi_n = E_n \Psi_n$$

에너지 상수

$$E_n \dashrightarrow H$$

$$\text{전자} \Rightarrow q = -e$$

$$H = \frac{1}{2m}(p + eA)^2 - e\phi$$

전장과 자기장에 있는 조건 하에서 전장을 갖는 해밀토니안을 구했다.

우리 교육의 문제점은
반드시 알아야 할 것은 기필코 피해가고, 알 필요가 없는 것은 질문하고 있다.

매 교육 시 마다 꼭 필요한 수학 팁을 알려 주고자 한다.
(동영상을 참고하시기 바랍니다.)

$$f(x) = e^{-ix}(\cos x + i\sin x)$$

$$f'(x) = -ie^{-ix}(\cos x + i\sin x) + e^{-ix}(-\sin x + i\cos x) = 0$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow f(x) = C \qquad f(0) = 1 = C \qquad f(x) = 1$$

$$e^{-ix}(\cos x + i\sin x) = 1 \qquad e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.178\cdots$$

$$e^1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

$$e^{ix} = \frac{(ix)^0}{0!} + \frac{(ix)^1}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3} + \frac{(ix)^4}{4} + \cdots$$

$$e^{ix} = \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)}_{\cos x} + i\underbrace{\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)}_{\sin x}$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$(\cos x + i\sin x)^n = (e^{ix})^n$$

$$e^{inx} = \cos nx + i\sin nx$$

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

$$e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + i\sin\beta)$$

$$= \underbrace{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}_{\cos(\alpha+\beta)} + i(\underbrace{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}_{\sin(\alpha+\beta)})$$

$$(-2)^{1.5} = [2\times(-1)]^{\frac{3}{2}} = [2\times(\cos\pi + i\sin\pi)]^{\frac{3}{2}}$$

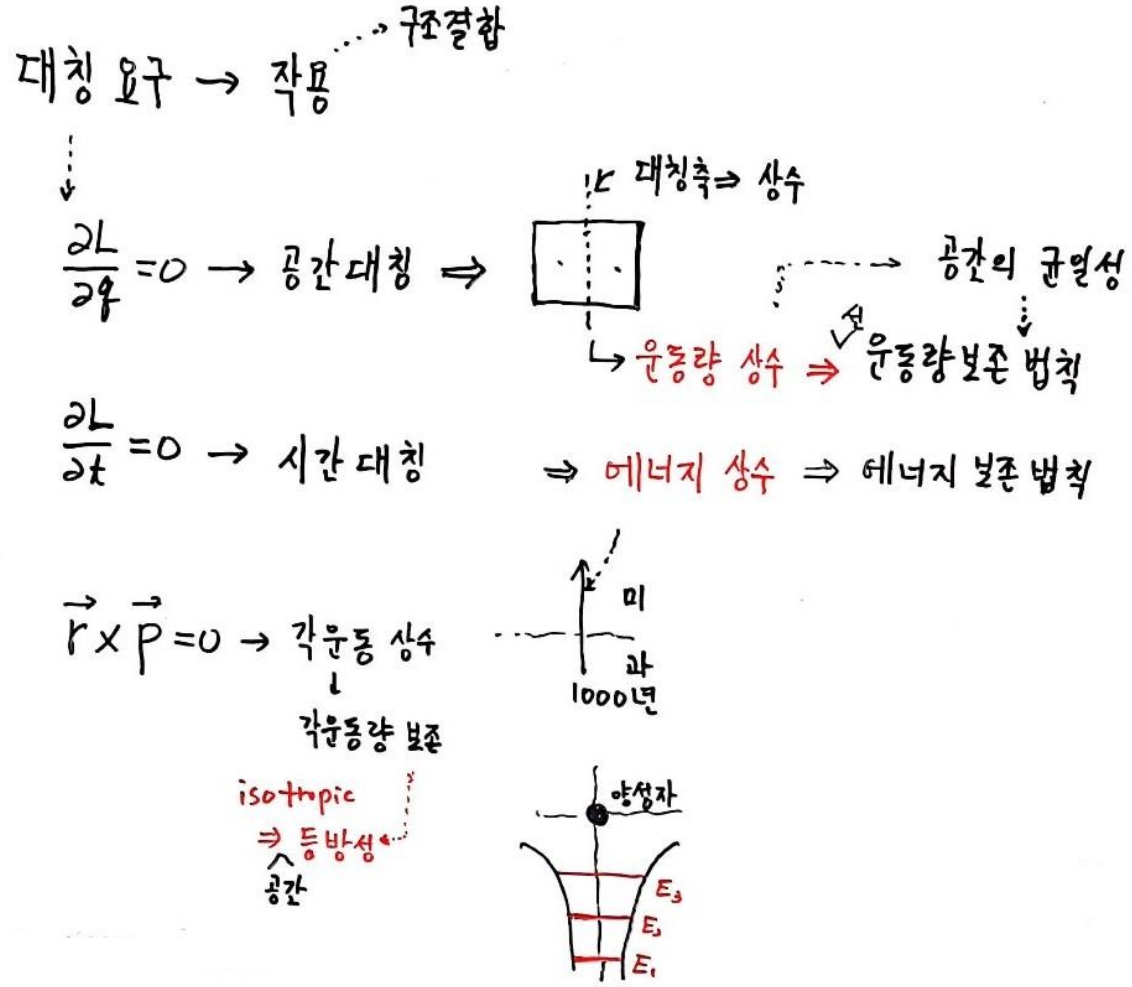
$$= 2^{\frac{3}{2}}\times[(\underbrace{\cos\tfrac{3\pi}{2}}_{0} + i\underbrace{\sin\tfrac{3\pi}{2}}_{-1})]$$

$$= 2^{\frac{3}{2}}(-i) = (2^{\frac{1}{2}})^3(-i)$$

$$= (\sqrt{2})^3(-i) = \sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}(-i)$$

$$= -2\sqrt{2}i$$

공부의 절대량이 부족하다.
박문호 박사가 공부를 많이 하는 것이 아니라, 대부분의 사람이 공부를 너무 하지 않는다.
훈련해야 한다.



물리학의 구조를 이해해야 한다.
Force를 적분하면 에너지가 되고, 에너지를 적분하면 작용(action)이 된다.
그래서 작용이 최소가 되는 작용최소의 원리를 찾은 것이다.

작용 최소화를 요구하는 것이 대칭이다.
대칭의 요구에 의해서 작용의 구조가 결정되었다. 작용의 구조가 세계의 모습이다.

대칭의 요구는 3가지로 요약할 수 있다.
첫 번째는 라그랑지안이 위치에 대하여 변하지 않아야 한다. 이 요구 조건이 공간 대칭이 된다.
공간 대칭의 축이 운동량이고 이 운동량이 상수 이다. 상수는 변하지 않는다. 이것이 운동량 보존의 법칙이다.
운동량이 보존되기 위해서는 공간이 균일해야(homogeneous)한다.

두 번째는 라그랑지안이 시간에 대해 변하지 않아야 한다 이것이 시간 대칭이다.
시간의 대칭축이 에너지 상수이다. 상수는 변하지 않는다. 이것이 에너지 보존 법칙이다.

세 번째는 각 운동량이 변하지 않아야 한다. 각 운동량 보존이다.
그러기 위해서는 공간의 등방성(isotropic)이 요구된다. 공간의 속성이 동일해야 한다.

물리학은 공간 대칭에서 선운동량 보존, 시간 대칭에서 에너지 보존, 그리고 각 운동량 보존, 이 3가지 보존법칙으로 이루어져 있다. 이 세 보존법칙의 대칭축이 상수이다.
포아송 괄호는 어떤 물리 시스템의 상수를 찾는 놀라운 법칙이다.

질점이 있다. 우주상의 모든 존재를 질점으로 바꾼다. 질점은 좌표상에 내 위치가 정해진다.
알아야 할 것은 좌표 q이다. 그것만 알면 된다. q는 시간의 함수이다. 시간이 지나면 q가 이동한다.
시간이 지나면서 위치가 이동하면 속도가 된다. 시간과 위치를 주면 속도가 나온다.
위치와 속도로 세상을 설명하는 함수가 라그랑지안이다.

그기에 질량을 주면 속도 곱하기 질량은 모멘텀이 된다.
그래서 위치와 운동량으로 구성된 함수가 해밀토니안이다.

포아송 방정식은 에너지와 관계가 있다
위치와 모멘텀으로 우주의 모든 것을 설명하겠다는 것이 포아송 괄호의 속성이다.
임의 함수를 위치와 운동량에 대하여 미분한 후 두 개를 곱해주고, 또 한 함수는 에너지를 위치와 운동량에 대하여 미분해 준다. 그 두 개를 곱한 것을 빼 준다. A×B - B×A 가 고전물리학에서는 0가 된다.
양자물리학에서는 곱하는 순서가 핵심이다. 그래서 0이 되지 않는 경우가 있고, 이 포아송 괄호는 양자역학의 교환자로 바뀌고 여기서부터 양자역학이 시작된다.

오늘은 문리의 정석을 공부했다.
이것이 고전 물리학의 꽃이고, 양자역학까지 가는 유일한 하이웨이이다.
수고하셨습니다.