

제 11회 137억년 우주의 진화 3강 특수 상대성 이론 외

(박문호 박사님의 강의를 요약 정리한 내용입니다.)

오늘은 상대성 이론을 공부한다.

특수 상대성 이론 이전에 갈릴레이 변환이 있었다.

상대성 이론 이 출현하게 된 배경을 알아야 한다.

17세기 뉴턴이 만유 인력을 발표하면서 충격을 주었다. <자연철학의 수학적 원리>에서 자연의 원리를 집대성 했다. 뉴턴의 매카니즘이 모든 것에 적용된다는 것을 알면서 학문이 끝났다고 느꼈다.

그러다 뉴턴의 역학에 충격을 준 사건이 발생했다. 맥스웰의 전자기파 였다.

뉴턴은 중력의 세계를 다루었다. 물체의 움직임에 관한 것이었다.

하늘의 천체들의 움직임이 지상에서 사과가 떨어지는 것과 같은 원리라는 것을 알게 되면서 중세가 마감을 한다.

달이 지구를 도는 것과 사과가 떨어지는 것이 동일한 원리라는 것을 밝힘으로서 신학의 세계가 끝이 났다.

그런데 맥스웰이 전자기파라는 완전히 다른 현상을 수식화 했다. 중력과 전자기는 완전히 다른 현상이다.

중력은 물질 즉 입자에 관한 현상이지만 전자기는 파동에 관한 것이다.

뉴턴 역학의 철학적 기반은 갈릴레이 변환이었다.

갈릴레이 변환은 도플러 현상과 같은 것이다.

우리가 차를 타고 가거나, 방 안에 있으나 물체의 움직임은 동일하다.

트럭을 타고 가면서 공을 위로 던져도 내 손에 공이 떨어진다. 물론 방 안에서 공을 위로 던져도 내 손에 떨어진다. 직관적으로는 차를 타고 가면서 공을 던지는 것과, 방 안에서 공을 던지는 것이 다를 것 같은데, 실제로는 동일하다. 등 속도로 나에게로 오거나 멀어지는 모든 시스템을 관성계라 한다.

측정 값은 반드시 좌표가 전제되어야 한다. 좌표에는 기준점이 있어야 한다.

1초에 10m를 달린다는 것은 정지한 땅 표면 위로 10m 달린다는 뜻이다. 기준점이 좌표계이다.

좌표계가 없는 어떤 수자도 없다. 그러나 측정하든 아니든 존재하는 숫자가 있다. 내 몸무게 60kg은 그대로 있다. 이 방 온도가 20도라면 이것은 좌표계에 상관 없이 20도이다. 이런 것을 tensor라고 한다. Tensor는 좌표계에 대하여 불변이다.

특수 상대성 이론이나 일반 상대성 이론은 단독 시스템으로 이야기하는 것이 아니다. 반드시 2개 이상의 시스템이 있어야 한다. 2개의 시스템이 서로 어떤 속도로 움직이는가에 대한 이야기이다.

특수 상대성 이론은 등속도의 세계이다. 일반 상대성 이론은 중력의 세계이다. 중력이 가속도이다. 중력이 가속도라는 것을 아인슈타인이 인류 역사상 처음으로 알았다. 그 생각 하나로 인류의 혁명이 일어났다. 그것을 수식화 하는 과정이 11년 걸렸다.

상대성은 모든 관성계에 대하여 모든 물리법칙은 공변적이다.

공변이란 어떤 물리 법칙을 수식으로 표현하면, 좌.우변이 동일하게 변화한다는 의미이다. 비율 즉 물리법칙이 동일하다는 의미이다. 공변한다는 것은 불변한다는 의미이다.

상대성은 뉴턴의 상대성과 아인슈타인의 상대성 2가지가 있다.

뉴턴의 상대성을 보장해 주는 것이 갈릴레이 좌표 변환이다. 보존되는 것은 길이(Δx), 시간(Δt) 그리고 가속도(a)가 보존된다. 가속도에 질량을 넣어 주면 힘이 보존된다는 뜻이다.

갈릴레이 좌표 변환을 수식으로 표현하면 다음과 같다.(이하 동영상을 참고하시기 바랍니다)

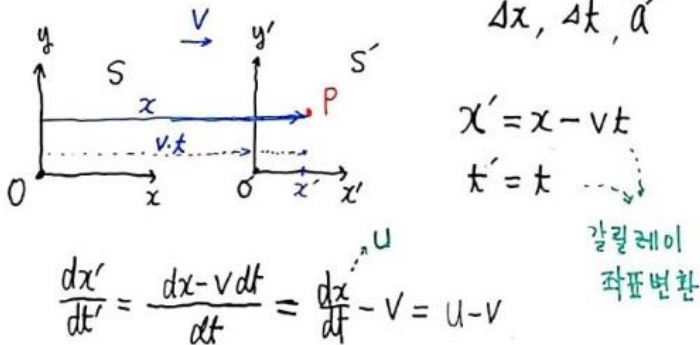
$$x' = x - vt$$

$$t' = t$$

물리 법칙은 동일하게 나온다.

상대성 : 모든 관성계에서 모든 물리법칙
공변 한다. 공변 \rightarrow 불변

뉴턴 상대성 : 갈릴레이 좌표변환
 $\Delta x, \Delta t, \vec{a}$



$$\frac{d}{dt'} \left(\frac{dx'}{dt'} \right) = \frac{du}{dt} \quad a' = a$$

속도 \rightarrow 시간

전자기 파 $\vec{F} = q\vec{E} + \frac{v}{c} \cdot \vec{B}$

$$x' = x - vt$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$x = \gamma[\gamma(x - vt) + vt']$$

$$= \gamma^2(x - vt) + \gamma vt'$$

$$t' = \frac{1}{\gamma v} [x - \gamma^2(x - vt)]$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma^2 v} [\gamma^2 vt + x(1 - \gamma^2)]$$

$$= \gamma \left[t + \frac{x}{v} \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) \right]$$

$$dx' = \gamma(dx - vdt)$$

$$dt' = \gamma \left[dt + \frac{dx}{v} \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) \right]$$

그런데 맥스웰 전자기파에서는 시간이 불변이 아니라는 데서 문제가 발생했다.

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{v}{c} \cdot \vec{B}$$

속도(v)가 시간과 엮여 있다.

뉴턴의 상대성이 전자기 현상에서는 맞지 않았다. 그래서 전자기 현상에서도 맞도록 갈릴레이 변환을 수정한 것이 로렌츠 변환이다. 속도가 낮을 때는 갈릴레이 변환으로하고, 속도가 높을 때는 전자기파에 맞는 변환을 찾아 내었다. 전자기 현상이란 빛이다. 빛이 물리학 속으로 들어오게 되었다. 만유인력 속으로 빛이 들어 왔다.

뉴턴 역학의 갈릴레이 변환을 확장하여 빛의 세계를 설명한 것이 로렌츠 변환이다.

한편, 소리는 공기가 있어야 전달되고, 파도는 물이 있어야 전달된다. 파동이 전달되기 위해서는 매질이 필요하다. 따라서 파동인 빛이 전달되려면 에테르란 매질이 있어야 한다고 모두 믿고 있었다. 빛이 진공을 통해서도 오기 때문에 진공에도 매질이 있어야 했다. 빛이 우주 전체에 있으므로 이 매질은 우주 전체에 있어야 했다. 어쩌면 우주 자체가 에테르라는 빛의 매질 속에 잠겨 있을 것이라고 추정했다.

에테르의 존재를 확인하기 위해 수 많은 과학자들이 노력했다. 미켈슨-몰리 실험이 유명하다.

결국 에테르의 존재를 밝히지 못했으나, 인류 역사상 실패해서 가장 위대한 실험이 되었다. 실패하고도 노벨상을 받았다. 실패 그 자체가 가장 위대한 증거이었다. 미켈슨은 그것까지 해석하지 못했으나, 아인슈타인이 그 실패한 실험으로부터 에테르가 존재하지 않는다고 선언했다. 그것으로부터 일반상대성 이론이 나왔다.

로렌츠 변환은 갈릴레이 변환 $x' = x - vt$ 에 상수(G)를 넣은 $x' = G(x - vt)$ 로 한 것이다.

(수식 설명은 동영상을 참고하시기 바랍니다)

$$U' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt + \frac{dx}{v}(\frac{1}{G^2} - 1)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 + \frac{\frac{dx}{dt}}{v}(\frac{1}{G^2} - 1)}$$

$$= \frac{U - v}{1 + \frac{U}{v}(\frac{1}{G^2} - 1)}$$

아인슈타인 특수상대성

∴ 광속불변 원칙 : 광속은 관찰자에 무관

$$U' = c \rightarrow U = c$$

$$c = \frac{c - v}{1 + \frac{c}{v}(\frac{1}{G^2} - 1)}$$

$$c + \frac{c^2}{v}(\frac{1}{G^2} - 1) = c - v$$

$$\frac{c^2}{G^2} - c^2 = -v^2 \quad \frac{c^2}{G^2} = c^2 - v^2$$

$$G^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - (\frac{v}{c})^2}$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \equiv \gamma \quad \gamma \rightarrow \infty$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma[t + \frac{x}{v}(\frac{1}{G^2} - 1)]$$

Lorentz
좌표변환

$$U' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt + \frac{dx}{v}(1 - \frac{v^2}{c^2} - 1)}$$

$$U' = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{dx}{v} \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{dx}{dt} \frac{v}{c^2}} = \frac{U - v}{1 - \frac{Uv}{c^2}}$$

$$U \rightarrow c \quad U' = \frac{c - v}{1 - \frac{cv}{c^2}} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{c(1 - \frac{v}{c})}{1 - \frac{v}{c}} = c$$

$$U, v \ll c \quad U' \approx U - v$$

갈릴레이 변환은 뉴턴의 상대성을 만족하는 시스템이고, 뉴턴의 상대성을 전자기 현상까지 포함하는 시스템이 로렌츠 변환이다. 특수상대성 이론의 다른 이름이 로렌츠 변환이다. 사실 수식은 아인슈타인 이전에 로렌츠가 모두 완성해 놓은 것이나 다름 없다. 그러나 로렌츠는 이 수식의 물리적 의미를 몰랐다. 이유는 로렌츠는 철저히 에테르의 존재를 믿고 있었기 때문이다. 여기서 아인슈타인과 나머지 모든 물리학자들이 갈라졌다. 아인슈타인은 에테르가 없다고 선언했다. 아인슈타인은 어린애 같은 마음을 갖고 있었다. 실험 결과를 그대로 받아 들이고, 기존 관념을 바꿔 버렸다.

물리 법칙은 동일하지만 하나의 값을 두고 모든 관성계가 동일 한 값을 가질 수는 없다는 것이다.

에테르가 존재하지 않기 때문에 시간과 공간이 바뀐다.

그리고 모든 관성계에서 딱 하나의 불변량이 존재하는데, 그것이 빛의 속도이다. 광속불변의 원칙이다.

어떤 경우에도 진공에서는 광속도가 일정하다는 것이 실험에서도 증명되었다. 광속은 관찰자에 무관하다.

광속불변이 아인슈타인의 특수 상대성이다

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \equiv \gamma$$

γ 의 범위는 1에서 무한대이다. γ 이 공간과 시간에 붙어 있기 때문에 공간과 시간이 마음껏 늘어나고 줄어들 수 있다는 의미이다.

로렌츠 변환은

$$x' = \gamma(x - vt)$$

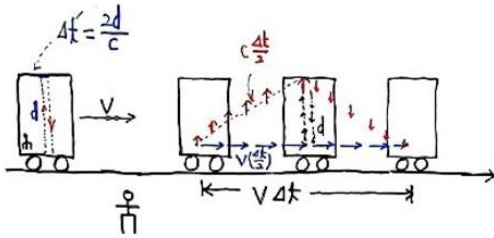
$$t' = \gamma \left[t + \frac{x}{c^2} \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \right] \text{ 이다.}$$

로렌츠 변환에서는 빛의 속도는 어떤 관성계에서도(관찰자에 무관하게) 항상 c 이다.

광속을 제외한 모든 것은 상대적이다.

다음에 원자 폭탄까지 간다. 특수 상대성 이론이다.

01:26



$$(c \frac{\Delta t}{2})^2 = (v \frac{\Delta t}{2})^2 + d^2$$

$$(\Delta t)^2 = \frac{4}{c^2} \cdot \frac{v^2}{4} (\Delta t)^2 + \frac{4}{c^2} d^2$$

$$(\Delta t)^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) = \frac{4d^2}{c^2}$$

$$\Delta t = \frac{\frac{2d}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

$$v \rightarrow c \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta t \rightarrow \infty$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \frac{\Delta t'}{\Delta t}$$

기차 철로 위를 바깥이 보이는 투명한 기차가 간다.

기차 속에 실험자가 천정에 있는 거울에 레이저를 쏘면 레이저가 반사되어 내려 온다. 걸리는 시간을 잰다.

상대성 이론에서는 움직이는 사람에게 프라임을 붙인다.

시간($\Delta t'$)은 거리 나누기 속도이다. $\Delta t' = \frac{2d}{c}$

기차가 속도 v 로 이동한다. 기차 3개를 등 간격으로 그린다. 이 그림이 나중에 원자폭탄까지 간다.

지상에서 다른 실험자가 관찰하고 있다.

기차가 Δt 시간에 간 거리는 $v \times \Delta t$ 이다.

기차의 높이는 d , 아래 변은 $v \frac{\Delta t}{2}$, 빔변은 $c \frac{\Delta t}{2}$

피타고라스 정리를 이용하면

$$(c \frac{\Delta t}{2})^2 = (v \frac{\Delta t}{2})^2 + d^2 \text{ 가 된다.}$$

이 수식을 정리하면

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \text{ 가 된다. } v \rightarrow c \text{ 면 } \Delta t \rightarrow \infty$$

즉 속도 v 가 광속 c 에 가까워지면 Δt 가 무한대가 된다. 시간이 팽창한다.

$\Delta t'$ 는 변화가 없다.

하나의 현상이 관찰자에 따라 달리 보인다. 상대성이다. 그러나 광속은 일정하다.

宇宙線이 날아 오다가 대기권과 충돌하면 뮤온(μ)이 생긴다. 뮤온의 수명은 10^{-6} 초 정도이다.

약 2km상공에서 생성된 뮤온이 10^{-6} 초 사이에 지구 표면에 도달할 확률은 아주 작다. 그러나 지구 표면에 뮤온이 상당히 많이 발견된다. 이유는 뮤온의 입장에서보면 공간이 수축되고, 지상 관측자의 입장에서는 시간(Δt)이 팽창되기때문이다. 공간 수축과 시간팽창이 동시에 일어난 현상 때문이다.

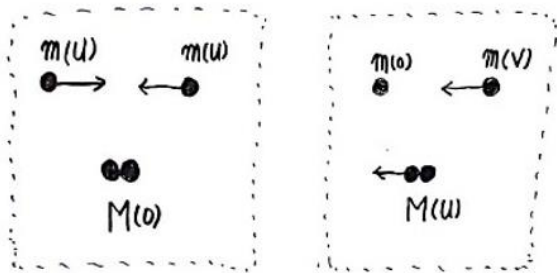
점보 제트기 속 원자 시계와 지상에 둔 원자 시계를 실험했을 때 제트기에 실은 원자시계가 느리게 갔다.

시간이 상대적이라는 것은 실험으로 증명되었다. 절대 시간은 없다.

길이를 보면

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{\Delta x'}{r}$$

움직이는 물체의 길이(l)는 정지해 있는 물체의 길이(l_0)보다 길다.



결량 보존

$$2m(u) = M(o)$$

$$m(o) + m(v) = M(u)$$

운동량 보존

$$m(u) \cdot u + m(u) \cdot (-u) = M(o) \cdot 0$$

$$m(o) \cdot 0 + m(v) \cdot v = M(u) \cdot u$$

$$m(v) = \frac{u}{v} M(u)$$

$$m(o) + \frac{u}{v} M(u) = M(u)$$

$$m(o) = M(u) \left(1 - \frac{u}{v}\right)$$

$$m(u) = \frac{1}{2} M(o)$$

$$\frac{m(u)}{m(o)} = \frac{\frac{1}{2} M(o)}{M(u) \left(1 - \frac{u}{v}\right)}$$

$$\frac{m(u)}{m(o)} \frac{M(u)}{M(o)} = \frac{1}{2 \left(1 - \frac{u}{v}\right)}$$

$$\left(\frac{m(u)}{m(o)}\right)^2 = \frac{1}{2 \left(1 - \frac{u}{v}\right)}$$

$$v = \frac{u + u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}$$

$$\left(\frac{m(u)}{m(0)}\right)^2 = \frac{1}{2\left(1 - \frac{u}{\left(\frac{u}{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)}\right)}$$

$$= \frac{1}{2 - \frac{u}{\left(\frac{u}{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)}} = \frac{1}{2 - \frac{u(1-\frac{u^2}{c^2})}{u}}$$

$$= \frac{1}{2 - (1 - \frac{u^2}{c^2})} = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{c^2}} = \frac{1}{1 - (\frac{u}{c})^2}$$

$$\frac{m(u)}{m(0)} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}}$$

$$m(u) = \frac{m(0)}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}} \rightarrow m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

$$\eta = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

$$\eta^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2$$

$$\eta^2 c^2 - \eta^2 v^2 = m_0^2 c^2 \quad \times \frac{1}{2m}$$

$$2m c^2 dm - 2m v^2 dm - 2m^2 v dv = 0$$

$$c^2 dm = v^2 dm + m v dv$$

$$E = F \cdot x \quad dE = \frac{dP}{dt} \cdot dx \quad p = mv$$

$$dE = \frac{d(mv)}{dt} \cdot dx = \frac{dx}{dt} \cdot d(mv) = v \cdot d(mv) = mvdv + v^2 dm$$

$$dE = c^2 dm \quad E = mc^2$$

$$\int dE = c^2 \int dm = c^2 m$$

$$\downarrow$$

$$E$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

빨리 움직일 때 질량(m)은 정지 질량(m_0)보다 무거워 진다.

유도하면 $E=mc^2$ 이다.

갈릴레이 변환에서 로렌츠 변환, 그리고 특수상대성 4가지 공식을 유도하였다.

$$E=mc^2$$

별, 원자력 발전, 원자폭탄은 모두 특수 상대성에서 나온다.

특수 상대성 이론은 시간과 공간의 변화를 다룬다.

일반 상대성 이론은 중력 즉 우주를 다룬다.

(2교시)

아인슈타인이 1905년도에 특수 상대성 이론을 발표하고 11년 동안 각고의 노력 끝에 일반 상대성 이론을 완성한다.

일반상대성 이론 을 발표하기 5개월 전 아인슈타인이 당시 최고의 수학자인 괴팅겐 대학의 힐버트 교수에게 일반 상대성 이론을 설명하고, 그에게 수학적 자문을 구한다.

논문은 힐버트가 5일 먼저 발표한다. 그러나 일반 상대성 이론의 지적재산권은 아인슈타인에게 있다고 모든 과학자들이 인정했다.

우주의 구조는 작용의 구조이다. 작용의 구조가 시간 대칭과 공간 대칭을 말하는 것이다. 시간 대칭에서 에너지가 나오고 공간 대칭에서 운동량이 나온다. 물리학은 에너지 보존과 운동량 보존으로 되어 있다. 시간과 공간이 좌표 변환에서 보존된다. 자연이 대칭을 요구한다. 그것이 세계의 설계도이다. 자연은 설계도로 만들어 졌다. 존재한다는 것은 불변하다는 것이다. 대칭은 보존된다는 것이고, 보존된다는 것은 불변이란 뜻이다. 대칭과 보존과 불변은 같은 말이다. 물리학은 보존, 불변, 대칭을 추구하는 학문이다.

자연으로부터 시간과 공간의 대칭 명령을 하달 받는 것이 작용이다. 작용이 세계의 구조를 결정해 준다. 작용을 미분하면 에너지가 되고, 에너지를 미분하면 force가 된다. 대칭의 요구조건을 충족 시켜 주는 것이 4개의 field이다. 약한 상호작용, 강한 상호작용, 전자기 상호작용, 중력이 우주의 4가지 힘이 대칭의 요구 조건을 수용하는 field이다. 바람 빠진 축구공은 대칭이 깨어진 상태다. 축구공을 팽팽하게 하는 공기의 압력이 우주의 4가지 힘이다. 우주의 4가지 힘은 원래 대칭을 회복하는데 들어가는 그 무엇이다.

우주의 법칙은 작용의 변분이 0이 되는 것이다.

$$\delta s=0$$

작용 최소의 법칙이다. 작용을 최소화하는 방향이 우주의 설계도이다. 그 속에서 우주의 많은 법칙들이 만들어진다. 힐버트는 위대한 수학자였으므로 작용에서부터 일반 상대성 이론을 유도하였다. 물리적 의미는 몰랐지만 수학적으로는 그렇다는 것을 알아 내었다.

작용 최소의 법칙으로부터 일반 상대성 이론을 유도하면 물리학 끝이다.

해밀턴 법칙이 작용최소의 법칙이라고 봐도 된다.

1916년 3월 20일 『물리학 연보』에 발표한 일반 상대성이론의 논문에서 아인슈타인은 자신의 이론을 검증할 수 있는 세 가지 예들, 즉 수성의 근일점이 1세기에 43 " 만큼 궤도상에서 돈다는 것, 빛이 중력장 속에서 휘는 것, 중력장 속에서의 빛의 적색 편이가 일어난다는 것을 제시했다. 수성의 근일점이 궤도상에서 돈다는 것은 이미 19세기 중반에 프랑스의 천문학자 르베리에가 관측했었고, 따라서 아인슈타인은 자신의 이론이 이 르베리에의 관측 결과와 일치한다고 주장했다. 하지만 당시에 강한 중력장을 지날 때 생기는, 빛의 적색 편이와 굴절 현상은 아직 관측되고 있지 않았다.

태양주변에서 빛이 휘는 현상은 제1차세계대전 직후인 1919년 개기일식 때 영국의 일식 관측대에 의해 처음으로 관측되었다. 사실 영국에서는 20세기초의 전자기학 분야에서 에테르 이론이 막강한 위치를 차지하고 있었고, 특수 상대성이론이 처음 나왔을 때에도 영국 과학자들은 상대성이론에 대해 거의 대부분 적대적이었으며, 심지어는 냉소적이기까지 했었다. 더욱이 1914년에서 1918년까지는 1차 세계대전 중이어서 독일의 학술 잡지가 영국으로 올 수가 없었고, 이 때문에 영국 과학자들은 일반 상대성이론에 관한 내용을 거의 알지 못했다. 영국에서 일반 상대성이론을 처음으로 소개한 사람은 왕립 천문학회의 간사였던 에딩턴(Arthur Stanley Eddington, 1882~1944)이었다.

에딩턴은 영국 왕립 천문학자로서 영국 천문학에서 가장 영향력이 있었던 다이슨(Frank Watson Dyson)과

긴밀한 연결을 맺고 있었다. 다이슨은 상대성이론의 전문가가 아니었지만 에딩턴으로부터 상대성이론에 관한 지식을 얻을 수 있었는데, 1919년 일식 때 아인슈타인의 예언을 검증하기 위해 관측대를 파견하자고 처음으로 제안했던 인물이 바로 다이슨이었다.

이리하여 영국에서 소위 '아인슈타인 효과'를 확인하기 위한 일식 관측대가 조직되게 되었고, 그 해 5월 29일 두 팀의 일식 관측대들은 아인슈타인 효과의 존재 여부를 판단할 수 있는 최초의 사진들을 얻어내었다. 1919년 11월 6일 긴급 소집한 영국 왕립학회와 왕립 천문학회 합동 회의에서는 관측 결과를 검토한 끝에 아인슈타인의 예언이 입증되었다고 발표했다. 이에 따라 아인슈타인은 과학계의 영웅이 되었다. 더구나 11월 7일에는 런던 {타임스}지가 이 내용을 '과학의 혁명/새로운 우주론/뉴턴 주의를 무너졌다'라는 식으로 대서특필했으며, 이에 따라 과학계에서만 알려졌던 아인슈타인은 일약 대중적인 유명 인사가 되게 되었다. 이리하여 1919년 11월 7일 20세기를 통해 가장 강력한 영향을 미치게 될 아인슈타인의 신화는 시작되었다.

뉴턴역학으로는 별 빛이 휘는 현상을 설명할 수 없다.

만유인력은 질량이 있어야 하는데 빛은 정지질량이 제로이기 때문에 만유인력에 적용이 되지 않는다.

뉴턴 역학은 속도가 늦을 때 근사치로 존재하는 역학이다.

아인슈타인의 상대성 이론은 속도가 늦든 빠르든 상관 없이 모든 우주에 적용된다.

그리고 중력이 우주의 보편적 힘이라는 것이 이 방정식을 통해 드러난다.

시공의 작용을 어떻게 표현할 것인가? 힐버트가 만들어 낸 공식이다.

$$S = \int R \sqrt{-g} d^4x$$

이 작용의 이름이 Hilbert- Einstein Action이다

위 식에서 $\sqrt{-g} d^4x$ 는 4차원 부피이다.

(수식 설명은 동영상을 참고 하시기 바랍니다)

$$S = \int R \sqrt{-g} d^4x \quad \delta S = 0 \quad R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$$

↑ Hilbert-Einstein action

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \delta R + \int d^4x R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x R \delta \sqrt{-g}$$

$$\delta \sqrt{-g} = \delta (-g)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (-g)^{-\frac{1}{2}} (-1) \delta g \quad g = g_{ij} \Gamma^{ij}$$

$$g^{ij} = \frac{\Gamma^{ij}}{g} \rightarrow g = \frac{\Gamma^{ij}}{g^{ij}} = g_{ij} \Gamma^{ij} \quad g = |g_{ij}| \quad \Gamma^{ij} = g g^{ij}$$

$$g = g_{ij} \Gamma^{ij} \quad \frac{\partial g}{\partial g_{ik}} = g_{ij} \frac{\partial \Gamma^{ij}}{\partial g_{ik}} + \Gamma^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial g_{ik}} = \Gamma^{ij} \delta_k^i = \Gamma^{ik}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \chi^l} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \chi^l} = \Gamma^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \chi^l}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \chi^l} = \Gamma^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \chi^l} \quad g_{ik} g^{ij} = \delta_k^j$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \chi^l} = -g_{kj} g_{in} \frac{\partial g^{kn}}{\partial \chi^l}$$

$$\delta g \rightarrow \frac{\partial g}{\partial \chi^l} = g g^{ij} (-g_{kj} g_{in} \frac{\partial g^{kn}}{\partial \chi^l})$$

$$= -g \delta_k^i g_{in} \frac{\partial g^{kn}}{\partial \chi^l} = -g g_{kn} \frac{\partial g^{kn}}{\partial \chi^l} =$$

$$\delta g = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

작용최소가 우주의 설계도이다.

상대성 이론은 자전거 타기와 같다. 다른 사람이 자전거 타는 것 한 달 본다고 자전거 탈 수 있는 것 아니다. 직접 타 보아야 할 수 있다.

인간 학습에는 2가지가 있다. 보면 할 수 있는 것(예: 글 읽는 것)과 봐서는 할 수 없는 것이 있다.

그것이 언어(language)이다. 상대성 이론은 제 3의 언어이다.

인간이 사용했던 최초의 언어는 몸짓 언어이다. 두 번 째는 20만년 전부터 호모 사피엔스가 사용했던 보컬언어이다. 제 3의 언어는 index language이다. 이것은 새로운 아프리카 언어를 배우는 것과 같다. 직접 해 보지 않으면 할 수 없다. 어린이들이 영어 캠프에 가서 훈련하면 한 달 정도면 생활 영어를 할 수 있다. 쓰니까 아는 것이다.

상대성 이론은 언어이다. 의미를 묻는 것은 현 단계에서는 넌 센스이다. 의미를 묻지 말고 사진을 찍어 가서 발음을 해 보라. 그리고 나서 일 주일 정도 지나면 하늘이 열릴 것이다. 우주 전체에 통용되는 새로운 언어를 배우고 있는 중이다. 이것이 맞고 우리가 쓰는 언어는 틀렸다. Nature 언어이다.

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int R \sqrt{-g} d^4x = \int d^4x \sqrt{-g} \delta R + \int d^4x R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x R \delta \sqrt{-g} \\
 \delta(\sqrt{-g}) &= \frac{-1}{2\sqrt{-g}} \delta g \\
 \delta g &= -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\
 \delta \sqrt{-g} &= \frac{g}{2\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = \frac{-\sqrt{-g} \sqrt{-g}}{2\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = \frac{-1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\
 \delta S_v &= \int d^4x R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x R \left(\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \quad \delta S = \frac{1}{16\pi G} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \\
 &= \int d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} \quad \delta S = \frac{1}{16\pi G} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} = 0 \\
 S &= \frac{1}{16\pi G} S_v + S_m \\
 \delta S &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta (\frac{1}{16\pi G} S_v + S_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} \frac{\delta S_v}{\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \\
 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad \text{Einstein tensor} \\
 R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= 8\pi G T_{\mu\nu} \quad c=1 \\
 R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

아인슈타인의 중력장 방정식이다.

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

내용 몰라도 된다. 제 3의 언어이다.

인덱스는 위에 있으면 동일하게 위에 붙이고, 아래에 붙일 때도 동일하게 아래에 붙인다. 이것이 중력장 방정식이다. 이것과 쌍을 이루는 것이 측지선 방정식이다.

운동량 보존 $d\vec{p}=0$

$$e_\mu = g_i$$

$$d(p^\mu \vec{e}_\mu) = (dp^\mu) \vec{e}_\mu + p^\mu d(\vec{e}_\mu)$$

$$= (dp^\mu) e_\mu + p^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\rho dx^\nu e_\rho$$

$$= (dp^\mu) e_\mu + p^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\mu dx^\nu e_\mu$$

$$= (dp^\mu + p^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\mu dx^\nu) e_\mu = 0$$

$$\frac{dp^\mu}{dz} + p^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{dx^\nu}{dz} = 0$$

$$\frac{d}{dz} \left(m \frac{dx^\mu}{dz} \right) + m \Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{dx^\rho}{dz} \frac{dx^\nu}{dz} = 0$$

$$e_\mu \cdot e_\nu = g_\mu \cdot g_\nu = g_{\mu\nu}$$

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{dz}$$

$$F = ma \quad \text{관성계}$$

$$F = \left(\frac{GM}{r^2} \right) m = g m \quad \text{중력장}$$

$$\frac{ma}{mg} = 1 \quad \boxed{a=g}$$

$g = 9.8 \text{ m/sec}^2$

4차원 중력

$$\frac{d^2 x^\mu}{dz^2} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{dx^\rho}{dz} \frac{dx^\nu}{dz} = 0$$

geodesic eq.

$F=ma$
관성계

운동량 보존의 법칙에 $dp=0$ 로 쓸수 있다.

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

geodesic equation 측지선 방정식 이다. 기름이 가장 적게 드는 비행기 항로이다.

앞 부분 $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$ 은 뉴턴의 관성력($F=ma$)이다.

뒷 부분 $\Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$ 은 4차원 중력이다.

최단 거리 운동 방정식이다. 우주에 있는 모든 입자가 가는 길이다.

에레베이터를 타고 내려 오는 중 선 이 끊어 질 경우 일시적으로 붕 뜨는 느낌을 든다. 화분을 들고 있다면 화분의 무게가 전혀 느껴지지 않는다. 일시적으로 중력이 사라진다. force가 0이 되는 시스템이 관성계이다.

중력이 사라진 이 시스템을 국소 관성계라 한다. 국소관성계는 가속도가 0 가 된다 .

거리를 시간으로 2번 미분하면 가속도가 된다. 국소 관성계는 가속도($\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$)가 0가 된다.

속도(상수)는 그대로 있다. 그것을 자유낙하라고 한다.

지구 주위를 달이 돌고, 태양 주위를 지구가 도는데 실제로는 측지선 길을 통해 자유낙하하는 것이다.

지구가 태양 주위를 도는 것이 아니라 자유낙하하고 있다. 정확하게 에레베이터 줄이 끊어 졌을 때 붕 뜨는 느낌처럼 움직인다. force가 0이다.

아인스타인의 꿈은 모든 포스를 기하학으로 바꿔 놓는 것이었다. 우리는 힘으로 느끼지만 사실은 힘이 아니다.

중력이 있다면 지구 전체에 있을 것이다.

그런데 지구 표면에 있는 떨어지는 엘리베이터 속에서는 힘이 없다. 지구 중력이 어느 point에서는 힘이 아니다. 측지선은 힘이 0인 point를 연결을 통해 연속으로 만들어 낸 것이다. 측지선으로 가는 길에는 힘이 하나도 없다. 우리는 힘에 의해서 돌아 가는 것이 아니다. 힘이라는 것이 없다는 것을 증명해 보인 것이 아인슈타인의 위대함이다. 힘이 아니고 우리가 높은 빌딩에서 떨어지는 현상인 것이다. 볼링 공을 들고 100층 빌딩에서 떨어져도 볼링 공이 무겁지 않다. 무게가 0이고, 힘이 제로이다. 지구 중력장 속의 한 포인트에도 힘이 없는 포인트가 있다. 그 포인트를 연결한 것이 측지선이다. 힘에 의해서 동작하는 것이 아니다. 힘이라는 것은 없다.

우주에 있는 모든 입자는 측지선 방정식을 따라 간다. 측지선은 힘이 제로되는 포인트를 연결한 것이다. 힘이라는 것은 없다. 아인슈타인의 혁명이다. 우리는 착각하고 있었다. 우주에 있는 모든 입자가 가는 길은 힘이 제로인 포인트를 따라 간다. 힘이 제로인 포인트를 연결한 것이 측지선 방정식이다. 자유낙하이다.

별을 공부해도 중력 중심점을 향해 자유낙하한다는 얘기가 나온다. 힘이라는 것은 없고 자유 낙하 밖에 없다. 자유낙하하는 포인트를 연결한 것이 측지선이다. 반드시 공부해야 한다.

지구상의 인간은 일반 상대성 원리를 이해한 사람과 이해하지 못한 사람 2종류로 나누어 진다. 중력장 방정식은 우주 전체에 존재하는 모든 천체와 존재가 가는 길을 만들어 준다.

중력장 방정식의 오른 쪽 변인 물질에너지에 의거 시공이 휘었다. 시공이 휘어져 있는 것이 force가 있는 것이 아니다. 태양 주위로 갈 때 빛이 휘어지는 이유는 빛 알갱이를 태양이 끌어 당겨서 휘어지는 것이 아니다. 태양 주위 4 차원 시공간이 휘어져 있기 때문이다. 길이 그 곳밖에 없다. 만들어진 길을 가는 것이 태양이 당겨서 가는 것이 아니다. 우리의 착각이다. 그 길은 힘이 0인 길이다.

$$F = ma \quad \text{관성력}$$

$$F = \left(\frac{GM}{r^2} \right) m = g m \quad \text{중력}$$

$g = 9.8 \text{ m/sec}^2$

$$\frac{ma}{mg} = 1 \quad \boxed{a = g} \quad \text{중력가속도}$$

관성 가속도와 중력 가속도가 같다.

우주 공간에 로켓이 창문에 커튼을 치고 갈 때 조종사가 가속 페달을 밟으면 안에 있던 사람의 몸은 뒤로 간다. 또는 주위에 행성 같은 큰 물체의 중력에 의해서도 몸이 뒤로 갈 수 있다.

이 두 가지 힘이 절대적으로 구분이 되지 않는다. 아인슈타인이 이 것을 깨닫고 중력이 관성력이라는 것을 알게 되었다.

힘은 없다. 휘어진 시공 밖에 없다. 휘어진 시공이 측지선이다. 인류의 위대한 지적 도약이다.

지구의 중력 가속도는 9.8m/sec^2 으로 정해져 있다.

이 것은 지구에서 쏘는 대포나, 총알이나, 축구공은 동일한 궤도로 간다는 말이다.

그런데 우리가 눈으로 보는 것은 모두 다르게 보인다. 지구 표면에서 진화한 우리 브레인은 시간과 공간을 항상 분리해서 보기 때문이다. 시간을 빼기 때문이다. 시간을 집어 넣으면 곡선이 하나 밖에 나오지 않는다. 측지선 밖에 없다.

우리가 눈으로 보는 운동은 시간을 뺀 운동이다. 시간을 집어 넣으면 동일한 곡선이 나온다. 우리가 착각하고 있는 것이다. 원자력이나 원자폭탄을 부정할 수 있다면 측지선을 부정해도 좋다.

물질 에너지에 의해서 우주의 시공이 결정 되었고, 우주의 시공이 입자들이 가는 길이다.

물질 에너지라는 우주의 주인공과 그 것의 무대 장치인 시간과 공간이 분리되지 않은 동일한 실체라는 것을 보여 주는 것이 아인슈타인의 중력장 방정식이다. 입자에 의해서 시공의 곡률이 만들어 졌고 그 만들어진 길이 측지선이다. 물질에 의해서 만들어진 시공의 곡률을 물질들은 따라 갈 수 밖에 없다. 무대 장치와 그 배우들이 분리되지 않고 동일한 실체라는 것이 중력장 방정식의 의미이다. 이원론은 존재하지 않는다. 에너지 물질과 시공의 곡률은 동일한 것이다. 서로가 서로를 정의한다.

더 위대한 것은 중력장 방정식이 작용최소의 원칙에서 나왔다는 것이다.
수고하셨습니다.